BINÄRER BLOCKCODE DER LÄNGE n

$$(a_1, a_2, \dots, a_n), \qquad a_i \in \{0,1\}$$

$C = \{000,110\} \subseteq \{0,1\}^3$

$a - 000 \xrightarrow{Störung}$
$b - 110$

Wir erhalten	Wir decodieren
000	000
001	000
010	?
011	?
100	?
101	?
110	110
111	110

$C = \{100,011\}$

Wir erhalten	Wir decodieren
000	100
001	011
010	011
011	011
100	100
101	100
110	100
111	011

Siehe da: ein besserer Code ☺

$n = 4$

Gesucht: Möglichst viele Codewörter $c_1, c_2, \dots, c_n$ mit der Eigenschaft: $d(c_i, c_j) \geq 3,\ i \neq j$

$m \geq 2$ erschließt sich recht schnell (siehe oben). Mehr als 2 sind nicht möglich, da jedes weitere Codewort, welches von 0000 verschieden wäre, mindestens drei Einsen hätte, ein drittes solches würde sich vom zweiten demzufolge nur in maximal zwei Stellen unterscheiden.

$$n = 5: \begin{bmatrix} 00000 \\ 11100 \\ 00111 \\ 11011 \end{bmatrix}$$

$$n = 6: \begin{bmatrix} 000000 \\ 111100 \\ 001111 \\ 110011 \\ 101010 \\ 010101 \end{bmatrix}$$

n	1	2	3	4	5	6	7
Maximale Anzahl von Codewörtern in einem binären Code der Länge n mit $d(c_i, c_j) \geq 3$, $i \neq j$	1	1	2	2	4	≥ 6	16[*]
Hamming-Schranke				$\leq \frac{16}{5}$	$\leq \frac{32}{6}$	$\leq \frac{64}{7}$	$\leq \frac{2^7}{2^3} = 16$

$$K(c_1, 1), K(c_2, 1), \dots, K(c_m, 1)$$

c_i: Mittelpunkt

1: Radius

Kugeln sind disjunkt!

$|K(c_i, 1)| = n + 1$

$m(n+1) = \sum_{c_i} |K(c_i, 1)| = \left| \bigcup_i K(c_i, 1) \right| \leq |\{0,1\}^n| = 2^n$

Hamming-Schranke: $m = |C| \leq \frac{2^n}{n+1}$

Darstellung von Codes als LGS:

Gibt es eine Matrix H, für die gilt: $H \cdot \underline{x} = \underline{o}$?

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y^T = 0111101$$

$$H \cdot y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y^T = 0111101$ wird decodiert durch 0111100.

Kommt bei $H \cdot y$ der Nullvektor heraus, so ist y ein Codewort, ansonsten gibt das Ergebnis die Änderungsposition an, an welcher ein Bit gekippt werden muss.

[*] [7,4]-Hamming-Code

Wie kann man aus den Wörtern 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 einen Code machen, der einen Fehler erkennt?

000 0

001 1

010 1

011 0

100 1

101 0

110 0

111 1

Paritätsbit – überall eine gerade Anzahl Einsen erzeugen.

PKZ – Personenkennziffer

$$\underbrace{a_1, a_2}_{\substack{0\quad 4\\ T\quad T}}, \underbrace{a_3, a_4}_{\substack{0\quad 4\\ M\quad M}}, \underbrace{a_5, a_6}_{\substack{7\quad 5\\ Y\quad Y}}, \underset{*}{\underset{\uparrow}{a_7}}, \underbrace{a_8, a_9, a_{10}}_{\text{Ort}}, \underset{\text{lfd. Nr.}}{\underset{\uparrow}{a_{11}}}, \underset{\text{Prüfziffer}}{\underset{\uparrow}{a_{12}}}$$

*	
2	19. Jh. Mann
3	19. Jh. Frau
4	20. Jh. Mann
5	20. Jh. Frau

Gewichtsvektor $\underline{k} = (4, 2, 1, 6, 3, 7, 9, 10, 5, 8, 4)$

Berechnung:

$$s = \underline{k} \cdot (a_1, a_2, \dots, a_{11}) \mod 11$$
$$a_{12} = 5(s+1) \mod 11$$

Falls $a_{12} = 10$, dann setze $a_{12} = 0$.

a) $(0, 1, 0, 2, 4, 4, 5, 0, 5, 5, 4)$

$$s = 0 + 2 + 0 + 12 + 27 + 28 + 45 + 0 + 25 + 40 + 16 = 195 \mod 11$$
$$s = 8$$
$$a_{12} = 5 \cdot 9 \mod 11 = 1$$

b) Einzelfehler?

nö

c) Nachbarschaftsvertauschungen?

nö