UNIVERSITÄT ROSTOCK

Mathematatik IV für Maschinenbau und Informatik

Stochastik

Prof. Dr. Friedrich Liese

Sommersemester 2007

INHALT

VORLESUNGSVERZEICHNIS

2007-04-05

1 EXKURS ÜBER KOMBINATORIK

Die Kombinatorik zählt endliche Mengen ab. Sie beschäftigt sich damit mit dem Bestimmen des Umfangs endlicher Mengen. Aus einer gegebenen Menge werden Elemente ausgewählt und angeordnet. Die einfachste kombinatorische Aufgabe ist die Anordnung von n gegebenen Elementen. Das sind die sogenannten *Permutationen.* Elemente kann man sich gleich durchnummeriert vorstellen, wir haben also die Zahlen $1, \dots, n$. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Zahlen anzuordnen?

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Als ersten Schritt gibt es das *Auswählen* mit bzw. ohne Wiederholung. Der zweite Schritt ist die *Anordnung* entweder mit Berücksichtigung einer Reihenfolge oder ohne. Diese Anordnungen mit Berücksichtigung der Reihenfolge nennt man auch *Variation* und dabei handelt es sich um ein n-Tupel. Ein n-Tupel ist immer eine Anordnung von Zahlen einer Folge.

Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge nennt man es (leider nicht sehr selbsterklärend) *Kombinationen* und das werden bei uns größtenteils *Teilmengen* sein.

Wir betrachten im Folgenden immer das Ziehen aus der Menge Zahlen $\{1, \dots, n\}$.

1. Ziehen von k Zahlen *mit* Berücksichtigung der Reihenfolge und *mit* Wiederholung.
$$\underbrace{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)}_{k\text{-Tupel}}, \qquad \varepsilon_i \in \{1, \dots, n\}$$
ANZAHL: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\text{-mal}} = n^k$
2. Ziehen von k Zahlen *ohne* Wiederholung *mit* Beachtung der Reihenfolge.
$$\underbrace{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)}_{\text{alle verschieden}}, \varepsilon_i \neq \varepsilon_j, i \neq j, \varepsilon_i \in \{1, \dots, n\}$$
ANZAHL: $n(n-1)\cdots(n-k+1)$
3. *Ohne* Wiederholung, *ohne* Reihenfolge, d. h. von den n Zahlen ist eine k-elementige Teilmenge auszuwählen. $k = 0, \dots, n$.

   Allgemein ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.
   GESAMTANZAHL:
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n-k+1+k)}{k!\,(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)}\end{aligned}$$
4. Ziehen von k Zahlen *mit* Wiederholung und *ohne* Berücksichtigung der Reihenfolge. Wir notieren dieses in Form von Zellen, in denen die Häufigkeit der Züge der i-ten Zahl mit Punkten gekennzeichnet wird:

•	••	•	•••	…

   GESAMTANZAHL:
$$|K| = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,n!} = \binom{n+k-1}{n}$$

2 EREIGNISSE, HÄUFIGKEITEN UND WAHRSCHEINLICHKEITEN

In Natur und Gesellschaft gibt es zwei Typen von Abläufen oder Erscheinungen. Die einen sind nicht zufällig und die anderen sind zufällig. Jetzt wollen wir uns einfach einmal über Beispiele herantasten an diese Begriffswelt.

1. **Nicht-zufällige Versuchsabläufe oder Versuche:**
   Ort, Geschwindigkeit und äußere Kräfte legen in einem mechanischen System den Zustand nach einer gewissen Zeit t eindeutig fest.
2. **Zufällige Versuchsabläufe oder Versuche:**
   - Bestimmte Menge eines bestimmten radioaktiven Präparats sei gegeben, nach 10 s wird gemessen, wie viele Teilchen zerfallen sind.

   Bei Wiederholung erhält man im Allgemeinen andere Werte.

2.1 VERSUCHE

- **Nicht-zufällige Versuche:** Bei gleichen Versuchsbedingungen erhält man bei Wiederholung immer das gleiche Ergebnis.
- **Zufällige Versuche:** Bei gleichen Versuchsbedingungen erhält man bei Wiederholung im Allgemeinen unterschiedliche Ergebnisse.

2.2 EIGENSCHAFTEN DER RELATIVEN HÄUFIGKEIT

Wir betrachten n Versuche sowie ein gewisses Ereignis A.

$h_n(A)$ bezeichnet die sogenannte *relative Häufigkeit des Ereignisses A*. Diese relative Häufigkeit hat folgende Eigenschaften:

1. $0 \leq h_n(A) \leq 1$
2. Seien A, B zwei Ereignisse, die nicht gleichzeitig auftreten können.
   - $A \vee B = A$ oder B eingetreten
   - $h_n(A \vee B) = h_n(A) + h_n(B)$

2.3 AUFGABE: SCHAFFEN EINES MATHEMATISCHEN MODELLS

1. Versuchsergebnisse:
   Zahlen, Vektoren, ..., die im Versuchsprotokoll gespeichert sind.
   BEISPIEL:
   - $1 \times$ Würfeln: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   - $n \times$ Würfeln: $\Omega = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n);\ \varepsilon_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

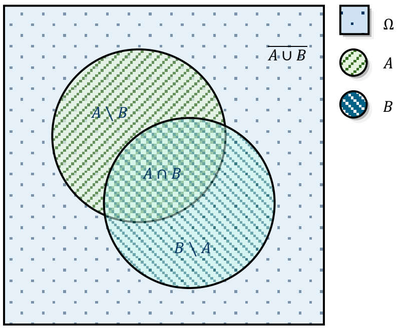
   Ω heißt Menge der Elementarereignisse, z. B. $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$
2. Ereignisse $A, B, \dots$
   Sind Teilmengen von Ω: $A, B \subseteq \Omega$
   BEISPIEL:
   - $2 \times$ Würfeln:
     $\Omega = \{(1, 1), \dots, (1, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$
     $A =$ Summe der Augen ≤ 10
     $= \{(1, 1), \dots, (1, 6), \dots, (4, 1), \dots, (4, 6), \dots, (5, 1), \dots, (5, 5), \dots, (6,1), \dots, (6, 4)\}$

   Falls Versuchsergebnis ω vorliegt, das in A liegt, so ist das Ereignis A *eingetreten*.

Mit Ereignissen wird wie mit Mengen gerechnet:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \text{Wenigstens eines der Ereignisse } A \text{ oder } B \text{ ist eingetreten} \\ A \cap B &= \text{Die Ereignisse } A \text{ und } B \text{ sind gleichzeitig eingetreten} \\ \overline{A} = \Omega \setminus A &= A \text{ ist nicht eingetreten} \\ \Omega &= \text{Sicheres Ereignis} \\ \overline{\Omega} = \emptyset &= \text{unmögliches Ereignis} \end{aligned}$$

Hilfsmittel in der Veranschaulichung hierzu sind beispielsweise VENN-Diagramme:



Für das Eintreten von A gibt es mehrere Möglichkeiten:

„A zieht B nach sich“, falls $A \subseteq B$.

BEGRÜNDUNG: A eingetreten $\Rightarrow \omega \in A$ beobachtet $\Rightarrow \omega \in B$ beobachtet $\Rightarrow B$ eingetreten.

Für die Verknüpfungen $\cap, \cup, \overline{a}$ gelten die üblichen Rechengesetze; insbesondere die DE-MORGAN-schen Regeln:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

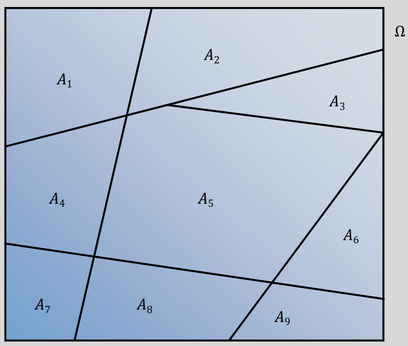
BEISPIEL:

- $1 \times$ Würfeln

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ A &= \text{gerade Zahl} = \{2, 4, 6\} \\ B &= (\text{Augenzahl} \le 4) = \{1, 2, 3, 4\} \\ \overline{A} &= \{1, 3, 5\} \\ A \cap B &= A \text{ und } B \text{ gleichzeitig} = \{2, 4\} \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 6\} = \overline{\{5\}} \\ \emptyset &= \text{keine der Zahlen } 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ ist gefallen} \\ \Omega &= \text{wenigstens eine der Zahlen } 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ ist gefallen} \end{aligned}$$

Falls Ω unendlich ist, existieren u. U. komplizierte Teilmengen. Deshalb wird nur ein Teilsystem $\mathfrak{F}$ von Teilmengen von Ω betrachtet, das abgeschlossen gegenüber $\cap$, $\cup$, $\overline{a}$ ist, d. h.

1. $A \in \mathfrak{F} \to \overline{A} \in \mathfrak{F}$
2. $A_1, \dots, A_n;\quad A_i \in \mathfrak{F};\quad \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{F};\quad \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{F}$
3. $\emptyset \in \mathfrak{F}, \Omega \in \mathfrak{F}$



$\mathfrak{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_9\},\ A \in \mathfrak{F}.$
Dieses $\mathfrak{F}$ ist noch keine Mengenalgebra.

1. DEFINITION: Ein System $\mathfrak{F}$ von Teilmengen von Ω heißt Mengenalgebra, falls obige 1., 2., 3. erfüllt sind. Gilt statt 2. sogar

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$$

Für jede unendliche Folge $A_1, A_2, \dots$ von Mengen aus $\mathfrak{F}$, so heißt $\mathfrak{F}$ σ-Algebra.

3. Bewertung der Ereignisse

   $P(A), A \in \mathfrak{F}$ sei eine Abbildung, die jedem $A \in \mathfrak{F}$ eine Zahl zuordnet mit folgenden Eigenschaften:

   1. $0 \le P(A) \le 1$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B); \quad A, B \in \mathfrak{F}, A \cap B = \emptyset$

2*. $P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0$

3. $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{F}$ (paarweise disjunkt: $\forall i \neq j: A_i \cap A_j = \emptyset$):

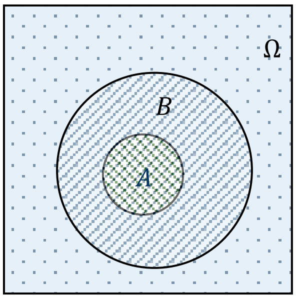
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Die Eigenschaft 2. heißt Additivität von P.
2*. heißt σ-Additivität
1., 2*., 3. heißen die Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie (KOLMOGOROWsche Axiome)

2. DEFINITION: Unter einem *Wahrscheinlichkeitsraum* versteht man ein Tripel $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, wobei Ω = Menge der Elementarereignisse, $\mathfrak{F}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω, P ein *Wahrscheinlichkeitsmaß.*

1., 4., 3. Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie.
Eigenschaften von P:

- Monotonie: $A \subseteq B \to P(A) \leq P(B)$
  BEGRÜNDUNG:



$$B = A \cup (B \cap \overline{A})$$

disjunkt

$$P(B) = P(A) + P\underbrace{(B \cap A)}_{\geq 0}$$

$$\geq P(A)$$

3. FOLGERUNG: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (aus der Monotonie)

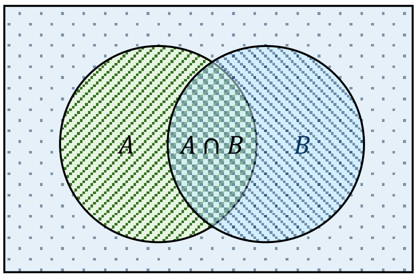
$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$$

4. FOLGERUNG: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Allgemeine Additionsregel:

5. FOLGERUNG: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$$

$$A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$$

$$B = (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$$

2007-04-19

Bisher war P gegeben, nun konstruieren wir P.

6. DEFINITION: Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ heißt *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum,* falls Ω höchstens abzählbar ist und $\mathfrak{F}$ das System aller Teilmengen von Ω ist.

Ω lässt sich nummerieren:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, z. B. $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$
$q(\omega) \underset{\text{Def}}{=} P(\{\omega\}),\ w \in \Omega$ ist eine Abbildung $q: \Omega \to [0,1]$ und heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion.*
Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

- $0 \leq q(\omega) \leq 1$
- $\sum_{(n=1)}^{\infty} q(\omega_n) = \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) = 1$

Zusammenhang von q und $P(A)$:

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots\} \to A = \bigcup_{l=1}^{\infty} \underbrace{\{\omega_{i_l}\}}_{\text{disjunkt}}$$

$$\to P(A) = \sum_{l=1}^{\infty} P(\{\omega_{i_l}\})$$

oder kurz:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} q(\omega)$$

Konstruktion:
Gegeben sei eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $q: \Omega \to [0,1]$.
7. $0 \leq q(\omega) \leq 1, \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) = 1$
ANSATZ: $P(A) \underset{\text{Def}}{=} \sum_{\omega \in A} q(\omega)$
$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} q(\omega) = \sum_{\omega \in A} q(\omega) + \sum_{\omega \in B} q(\omega)$ (Additivität)
P erfüllt alle Anforderungen an ein Wahrscheinlichkeitsmaß (siehe Axiome).

8. DEFINITION: Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ heißt *klassischer Wahrscheinlichkeitsraum* oder *laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum,* falls die Anzahl der Elemente $=: |\Omega|$ endlich ist und die Wahrscheinlichkeitsfunktion $q(\omega) = P(\{\omega\})$ konstant ist.

8A. FOLGERUNG: In einem klassischen Wahrscheinlichkeitsraum gilt $q(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ und

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller Fälle}} \quad (\text{Fall} = \omega).$$

BEWEIS:

$$c = q(\omega)$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} c = 1$$

$$\Rightarrow c \cdot |\Omega| = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} q(\omega)$$

$$= \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

9. BEISPIEL: n-maliger Münzwurf

$$0 \mathrel{\hat{=}} \text{Zahl}, \qquad 1 \mathrel{\hat{=}} \text{Wappen}, \ \text{gleiche Chance}$$

$$\Omega = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \qquad \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$$

Alle Folgen haben die gleiche Chance ⇒ klassisches Modell.

$$|\Omega| = 2^n, \qquad A_k = k \times \text{Wappen gefallen}$$

$0 \le k \le n$: Klassisches Modell:

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

$$\binom{n}{k} = \text{Anzahl der Plätze, wo 1 steht}$$

10. BEISPIEL: n-maliges Würfeln, regulärer Würfel

$$\Omega = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \qquad \varepsilon_i \in \{1, \dots, 6\}\}$$

Wegen Symmetrie haben alle Folgen die gleiche Chance ⇒ klassisches Modell.

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6 = 6^n$$

$$\begin{aligned} A &= \text{Summe der Augen} \ge 10 \\ &= \{(4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\} \\ P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

11. Urnenmodell: N Kugeln: M rot, $N - M$ schwarz.

n ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge

$$A_{n,k} = k \text{ der } n \text{ gezogenen Kugeln sind rot}$$

Wir konstruieren nun ein Ω mit gleichwahrscheinlichen ω.

Nummerierungstrick: $1, \dots, M$ rot, $M + 1, \dots, N$ schwarz

Wichtig: Die ausgewählten Teilmengen von Nummern haben die gleiche Chance.

$$\Omega = \{\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}, \qquad \varepsilon_i \in \{1, \dots, N\}\}, \qquad |\Omega| = \binom{N}{n}$$

$$A_{n,k} = \{\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}, \qquad k \text{ der } \varepsilon_i \text{ aus } 1, \dots, M, \text{ restliche } M + 1, \dots, N\}$$

12.

$$P(A_{n,k}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$0 \le k \le \min(n, M)$$

BEISPIEL: Lotto, 6 aus 49, $N = 49$

$$M = 6 \text{ richtige Zahlen}, \qquad n = 6, k = 6$$

$$P(A_{49,6}) = \frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = 7{,}1 \cdot 10^{-8}$$

13. Urnenmodell mit Zurücklegen:

Nummerierungstrick, Reihenfolge.

$$\Omega = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \qquad 1 \le \varepsilon_i \le N\}$$

Klassisches Modell, $|\Omega| = N^n$, $|A_{n,k}| = ?$

Wähle k Plätze aus. Setze auf diese mit Ordnung und Wiederholung die Zahlen $1, \dots, M$

M^k Varianten.

Auf $n - k$ Plätze Zahlen $M + 1, \dots, N$ setzen.

$$|A_{n,k}| = \binom{n}{k} \cdot M^k \cdot (N - M)^{n-k}$$

$$\Rightarrow P(A_{n,k}) = \binom{n}{k} \cdot \frac{M^k (N - M)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

14. Mehrfarben-Urnenmodelle

N Kugeln, r Farben

$$\underbrace{M_1}_{\text{1. Farbe}}, \dots, \underbrace{M_r}_{r\text{-te Farbe}}, \qquad M_1 + \dots + M_r = N$$

n Kugeln ziehen

$$k_1 + \dots + k_r = n$$

$$A_{n,k_1,\dots,k_r} = k_1 \text{ der gezogenen Kugeln 1.Farbe}, \dots, k_r \text{ der gezogenen Kugeln } r\text{-te Farbe}$$

Ohne Zurücklegen:

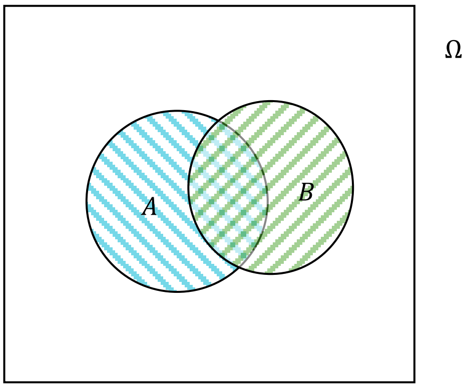
$$P\left(A_{n,k_1,\dots,k_r}\right) = \frac{\binom{M_1}{k_1} \cdot \dots \cdot \binom{M_2}{k_2}}{\binom{M}{n}}$$

Mit Zurücklegen:

$$P\left(A_{n,k_1,\dots,k_r}\right) = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} \cdot \left(\frac{M_1}{N}\right)^{k_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{M_r}{N}\right)^{k_r}$$

2007-04- 26

3 BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEITEN, UNABHÄNGIGE EREIGNISSE



Bekannt: B ist eingetreten.

1. DEFINITION: Gegeben ist der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $A, B \in \mathfrak{F}$ Ereignisse; $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) \underset{\text{Def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.

BEMERKUNG: In Abhängigkeit von A ist $P(A|B)$ wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Ereignisse A werden anders bewertet. Insbesondere gilt

$$P(B|B) = 1.$$

2. ALLGEMEINE MULTIPLIKATIONSFORMEL:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

BEISPIEL: $1 \times$ Würfeln, $B =$ gerade Zahl, $B = \{2, 4, 6\}$, $A =$ „6“ gefallen $= \{6\}$

$$P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{6\}, \qquad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

3. DEFINITION: Zwei Ereignisse A, B heißen *unabhängig,* falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt.

Sind $A_1, A_2, \dots, A_n$ Ereignisse, so heißen sie (vollständig) *unabhängig,* falls die Produktformel für jede Auswahl gilt, d. h. $\forall k : \forall$ Auswahlen $: A_{i_1}, \dots, A_{i_k}; P\left(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_k}\right)$.

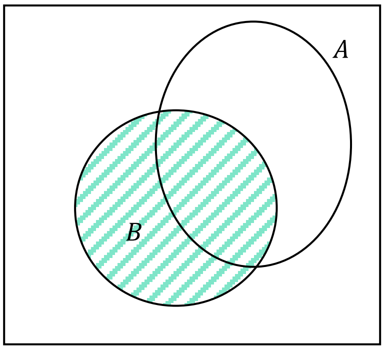
BEISPIEL: $A_1, \dots A_5$ unabhängig $\Leftrightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \wedge \dots \wedge P(A_3 \cap A_5) = P(A_3)P(A_5) \wedge \dots \wedge P(A_2 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_2)P(A_4)P(A_5)$.

BEMERKUNG: $P(B) > 0, P(A) = (PA|B) \Leftrightarrow A, B$ unabhängig

3A. FOLGERUNG: Sind A und B unabhängig, so sind auch A und $\overline{B}$ sowie $\overline{A}$ und B sowie $\overline{A}$ und $\overline{B}$ unabhängig.

BEWEIS: $B = \underbrace{(B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)}_{\text{disjunkt}}$

$$\Rightarrow P(B) = \underbrace{P(B \cap A)}_{\text{unabhängig}} + P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(A)P(B) + P\left(B \cap \overline{A}\right) \Rightarrow P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B)P\left(\overline{A}\right) = P(B)\left(1 - P(A)\right)$$



4. BEISPIEL: $2 \times$ Würfeln

$$\begin{aligned} A &= \text{Summe der Augen} \leq 4 \\ B &= \text{Im zweiten Wurf gerade Zahl} \\ A &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\} \\ B &= \{(1,2),(1,4),(1,6),\dots,(6,2),(6,4),(6,6)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{(1,2),(2,2)\} \\ P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ P(B) &= \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9} \\ P(A \cap B) &= \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Aber: $P(A) = \frac{1}{6}$

Daraus folgt: A und B sind *nicht unabhängig,* womit sie *abhängig* sind.

Jetzt: $\tilde{A} =$ Augenzahl im ersten Versuch ≤ 4

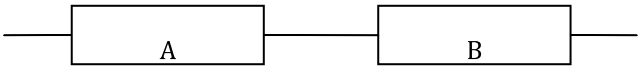
$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \{(1,1),\dots,(1,6),\dots,(4,1),\dots,(4,6)\} \\ P\left(\tilde{A} \cap B\right) &= \frac{1}{3} \\ P(B) &= \frac{1}{2} \\ P\left(\tilde{A}\right) &= \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P\left(\tilde{A} \cap B\right) = P\left(\tilde{A}\right)P(B) \Rightarrow \tilde{A}, B \text{ unabhängig}$$

Werden mehrere Versuche durchgeführt und gehen in die Ereignisse A und B *gleichzeitig* die Ergebnisse des gleichen Versuchs ein, so sind A und B *abhängig.* Werden A und B durch *unterschiedliche* Versuche definiert, so sind A und B *unabhängig.*

5. ZUVERLÄSSIGKEIT VON REIHEN-PARALLELSCHALTUNGEN

Reihenschaltung



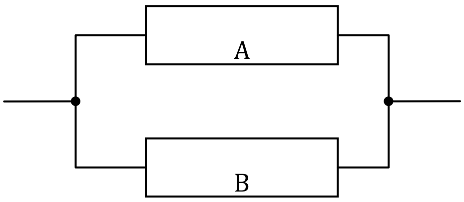
System arbeitet $\Leftrightarrow$ A und B arbeiten beide gleichzeitig: $A \cap B$

A, B unabhängig $\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System arbeitet: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A) = 0{,}9, \qquad P(B) = 0{,}9$$

$$P(A \cap B) = 0{,}81$$

Parallelschaltung



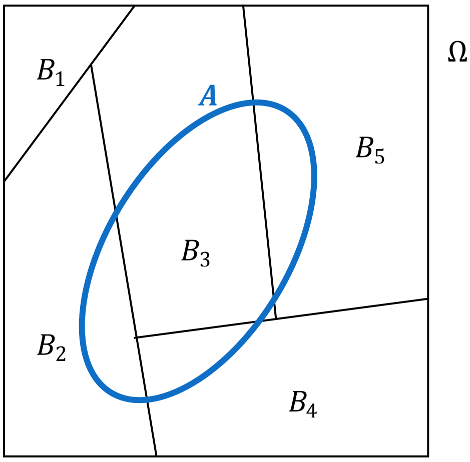
System arbeitet, wenn wenigstens ein Bauteil arbeitet: $A \cup B, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A) = P(B) = 0{,}9$$

$$A \cup B \neq \emptyset$$

$$P(A \cup B) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}81 = 0{,}99$$

Zerlegung von Ω:



Zerlegung $B_1, B_2, \ldots, B_n$

$$B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

Es gilt:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{A \cap B_i}_{\text{disjunkt}}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i),$$

allgemeine Produktformel

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

6. FORMEL FÜR DIE TOTALE WAHRSCHEINLICHKEIT

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

7. Stanzerei liefert an Prüfstelle 3 Behälter mit Teilen.

1. Behälter	20 000 Stück	5 % Ausschuss
2. Behälter	10 000 Stück	1 % Ausschuss

Die Teile werden gemischt, der Prüfer entnimmt ein zufälliges Teil. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss A mit B_1 = aus 1. Behälter bzw. B_2 = aus 2. Behälter?

$$P(A|B_1) = 0{,}05$$
$$P(A|B_2) = 0{,}01$$
$$P(B_1) = \frac{20000}{20000 + 10000} = \frac{2}{3}$$
$$P(B_2) = \frac{1}{3}$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = 0{,}05 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}01 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}037$$

2007-05-03

Umkehrung der Formel für totale Wahrscheinlichkeit:

$B_1, \dots, B_n$ disjunkt werden interpretiert als unterschiedliche Ursachen für einen eingetretenen Effekt (Ereignis A).

Ziel: für eingetretenen Effekt A die „wahrscheinlichste“ Ursache zu ermitteln!

8. BAYESSCHE FORMEL

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} \overset{\text{tot. Wk.}}{=} \frac{\big(P(A|B_i)P(B_i)\big)}{P(A|B_1)\cdot P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

$$= \frac{\big((A|B_i)P(B_i)\big)}{\sum_{j=1}^{n} P\big(A\big|B_j\big)P\big(B_j\big)} = P(B_i|A)$$

BEISPIEL: 3 gleichartige Maschinen, Anteil an Gesamtproduktion:

1. 20 %
2. 30 %
3. 50 %

Ausschusswahrscheinlichkeiten:

1. 5 %
2. 4 %
3. 2 %

Gesucht: Zufälliges Teil Ausschuss aus Produktion: Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt dies von Maschine 1?

$$A = \text{Stück ist Ausschuss}$$
$$B \coloneqq \text{Stück stammt aus Maschine } i, i = 1, \dots, 3$$

$$\begin{aligned} P(B_i|A) &= P(A|B_1)\cdot P(B_1)\cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i)} \\ &= \frac{0{,}05\cdot 0{,}3}{0{,}05\cdot 0{,}2 + 0{,}04\cdot 0{,}3 + 0{,}02\cdot 0{,}5} \\ &= 0{,}31 \end{aligned}$$

BEISPIEL 8A. Testen einer bestimmten Krankheit. Die Krankheit tritt bei 0,5 % der Bevölkerung auf. Der Test zeigt bei Kranken in 99 % der Fälle eine Reaktion, aber auch bei 2 % der Gesunden.

Nun haben wir einen positiven Test. Gibt es Grund zur Panik bzw. mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Krankheit vor?

$$K = \text{krank}$$
$$\overline{K} = \text{gesund}$$
$$A = \text{Test zeigt Reaktion}$$

$$\begin{aligned} P(K|A) &= \frac{P(A|K)P(K)}{P(A|K)P(K) + P(A|\overline{K})P(\overline{K})} \\ &= \frac{0{,}99\cdot 0{,}005}{0{,}99\cdot 0{,}005 + 0{,}002\cdot 0{,}995} \\ &= 0{,}2 \end{aligned}$$

3.1 BERNOULLI-SCHEMA

n unabhängige Versuche, wobei es in jedem Versuch nur Erfolg oder Misserfolg gibt, diese jeweils mit konstanter Wahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ bzw. $1 - p$. Der Wahrscheinlichkeitsraum Ω besteht dann aus allen Folgen von n Werten, von denen jeder Wert lediglich 0 oder 1 werden kann:

$$\Omega = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$$
$$\mathfrak{F} = \text{System aller Teilmengen}$$

Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} q(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= p(\text{falls } \varepsilon_1 = 1) \cdot (1-p)(\text{falls } \varepsilon_1 = 0) \\ &= p^{\varepsilon_1} \cdot (1-p)^{1-\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot p^{\varepsilon_n}(1-p)^{1-\varepsilon_n} \\ &= p^{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^n 1-\varepsilon_i} \\ &= p^{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} \cdot (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} \end{aligned}$$

Sei $A_{n,k}$ = Ereignis bei n Versuchen genau k Erfolge zu erzielen, so errechnet sich die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis folgendermaßen:

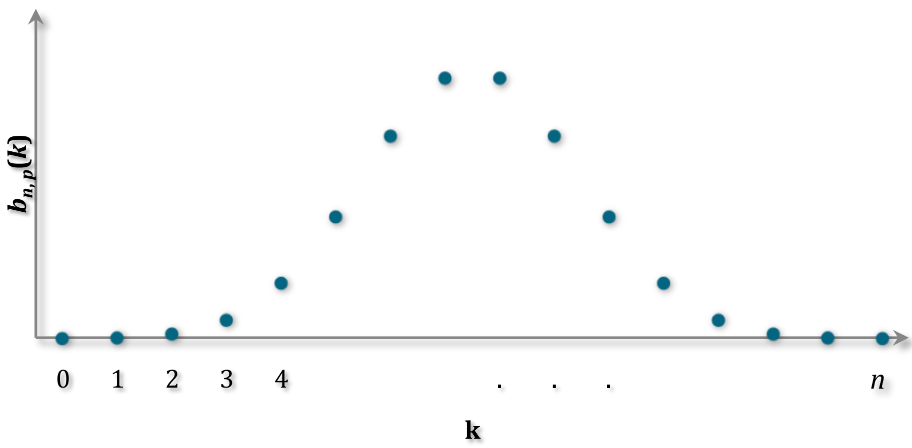
$$P(A_{n,k}) = \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in A_{n,k}} q(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = |A_{n,k}| \cdot p^k(1-p)^{n-k}$$

wobei $|A_{n,k}|$ = Anzahl der Plätze von n möglichen mit $1 = \binom{n}{k}$.

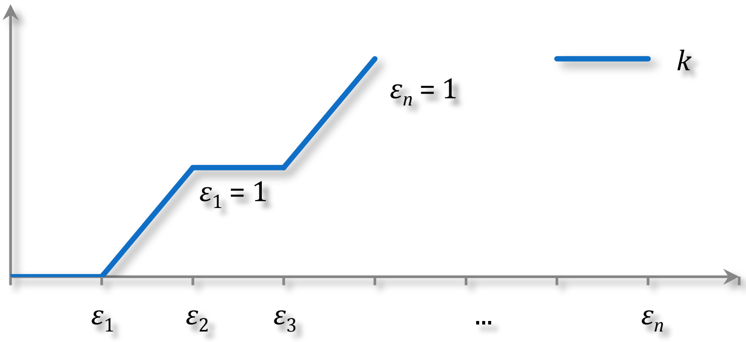
9. DEFINITION: Die Zahlenfolge $b_{n,p}(k) = \binom{n}{k}p^k \cdot (1-p)^{n-k}, k = 0, \dots, n$ heißt Binomialverteilung und die $b_{n,p}(k)$ heißen Einzelwahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung.

10. SATZ: Die Wahrscheinlichkeit für k-fachen Erfolg wird im Bernoulli-Schema gegeben durch die Einzelwahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung. Daraus folgt:

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n,p}(k) = 1$$



Pfadregel:



3.2 POISSONSCHER GRENZWERTSATZ

Falls das n sehr groß und p sehr klein ist, dann sind $b_{n,p}(k), k = 0, \dots, n$ schlecht berechenbar. Wir betrachten nun den Fall $p_n = \frac{\lambda}{n}$, wobei λ fest gewählt sei.

Dann ist $b_{n,p_n}(k) = \binom{n}{k}(p_n)^k(1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

$$\begin{aligned} b_{n,p_n}(k) &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\dots\cdot\frac{n-k+1}{n}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{1}\cdot\dots\cdot\underbrace{\left(1-\frac{k-n}{n}\right)}_{1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{1} \end{aligned}$$

11. SATZ (POISSONSCHER GRENZWERTSATZ): Falls eine Folge von Bernoulli-Schemata mit $p_n = \frac{\lambda}{n}$ streben die Einzelwahrscheinlichkeiten $b_{n,p_n}(k)$ gegen $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Die Folge $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \dots$ heißt Poisson-Verteilung und die Elemente Einzelwahrscheinlichkeiten der Poissonverteilung.

Wann wird die Poissonverteilung angewendet?

- Große Anzahl von Versuchen mit kleinen Erfolgswahrscheinlichkeiten
  Beispiel: Radioaktiver Zerfall, Unfallgeschehen.

2007-05-10

4 ZUFALLSVARIABLE, ZUFÄLLIGE VEKTOREN UND DEREN VERTEILUNGEN

1. DEFINITION: Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Eine Funktion $X: \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *Zufallsvariable,* falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\{\omega: X(\omega) < t\} \in \mathfrak{F}$.

BEMERKUNG: Die letzte Bedingung ist notwendig, weil $P(A)$ nur für $A \in \mathfrak{F}$ definiert ist.

1A. DEFINITION: Ein Vektor, dessen Komponenten Zufallsvariable sind, heißt *zufälliger Vektor*: $\big(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big)$. Für $n = 2$ ergibt sich ein zufälliger Punkt in der Ebene, für $n = 3$ ein zufälliger Punkt im Raum.

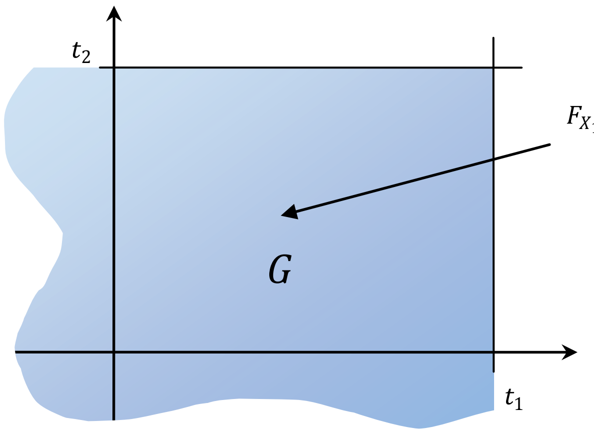
BEISPIEL: Bernoulli-Schema, $\Omega = \big\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n): \varepsilon_i \in \{0,1\}\big\}$

$$X(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \text{Gesamtanzahl der Erfolge}$$
$$Y(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 = \text{Gesamtanzahl im 1., 3., 5. Versuch}$$

2. DEFINITION: X sei Zufallsvariable, $t \in \mathbb{R}$. dann heißt $F_X(t) \underset{\text{Def}}{=} P(X < t)\ \big(P(\{\omega: X(\omega) < t\})\big)$ die Verteilungsfunktion von X.

Verteilungsfunktion des zufälligen Vektors: $F_{X_1,\dots,X_n}(t_1, \dots, t_n) = P(X_1 < t_1, \dots, X_N < t_n)$

$n = 2$



$F_{X_1,X_2}(t_1, t_2) =$ Wahrscheinlichkeitspunkt (x_1, x_2) liegt in G

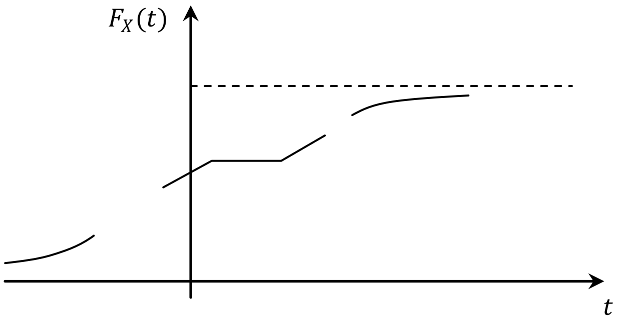
3. MONOTONIE: $t_1 < t_2; A = \{X < t_1\} \subseteq B = \{X < t_2\}$

$$P(A) \le P(B) \to F_X(t_1) \le F_X(t_2)$$

4. LIMESVERHALTEN FÜR $t \to \infty, t \to -\infty$

$$\lim_{t\to\infty} F_X(t) = \lim_{t\to\infty} P(X < t) = 1$$

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$$



5. INTERVALLWAHRSCHEINLICHKEIT

$$t_1 < t_2; A = \{\omega: X(\omega) < t_1\}$$

$$B = \{\omega: X(\omega) < t_2\}, \underbrace{A \cup \{t_1 \leq X < t_2\}}_{\text{disjunkt}} = B$$

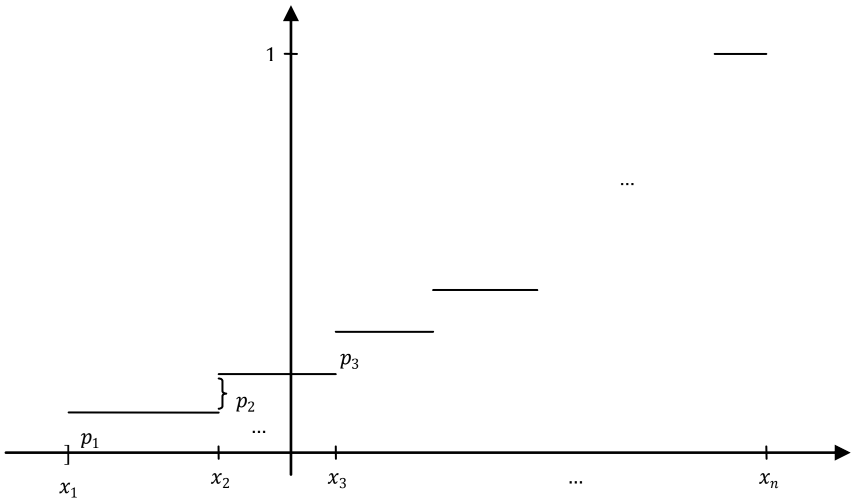
6. DEFINITION: Eine Zufallsvariable X heißt *diskret,* falls sie höchstens abzählbar viele verschiedene Werte $x_1, x_2, \ldots$ annehmen kann. $p_i = q(x_i) = P(X = x_i)$ heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion.

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots \end{pmatrix}$ heißt *Wahrscheinlichkeitstabelle*.

Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable:

$$\{\omega: X(\omega) < t\} = \bigcup_{i: x_i < t} \{\omega: X(\omega) = x_i\}$$

$$\Rightarrow P(X < t) = \sum_{i: x_i < t} P(X = x_i) = \sum_{i: x_i < t} p_i$$



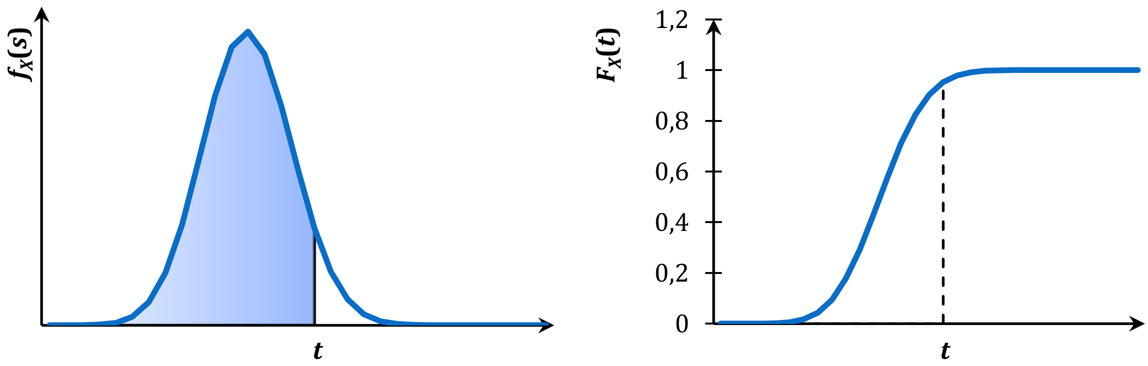
7. DEFINITION: Eine Zufallsvariable X heißt *stetige Zufallsvariable,* falls eine Funktion, *Dichtefunktion* genannt, mit folgenden Eigenschaften existiert:

$$\rightarrow f_X(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\, dt = 1$$

$$\Rightarrow F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\, ds$$

Dichtefunktion:



$$F_X(x) = \text{Fläche unter } f_X(s) \text{ bis } s \leq t$$

Intervallwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(a \leq X < b) &= F_X(b) - F_x(a) \\ &= \int_{-\infty}^{b} f_X(s)\, ds - \int_{-\infty}^{a} f_X(s)\, ds \\ &= \int_{a}^{b} f_X(s)\, ds \end{aligned}$$

8. $P(a \leq X < b) = \int_a^b f_X(s)\, ds$ falls X stetig ist und die Dichte $f_X(s)$ hat. Wie erhält man nun aus der Verteilungsfunktion die Dichte?

$$\frac{1}{h}\big(F_X(t+h) - F_X(t)\big) = \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f_X(s)\, ds \xrightarrow[h\to 0]{} f_X(t)$$

9. $F_X'(t) = f_x(t)$

10. DEFINITION: Ein zufälliger Vektor (X, Y) heißt stetig, falls $F_{X,Y}(s,t)$ existiert mit

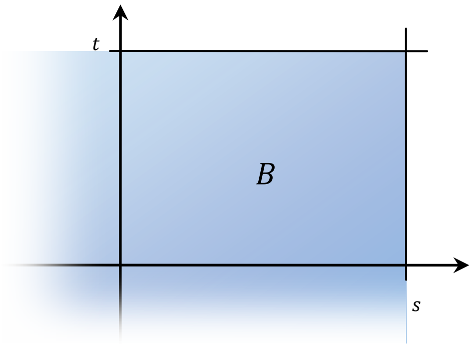
$$\rightarrow f_{X,Y}(s,t) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(s,t)\, ds\right) dt = 1$$

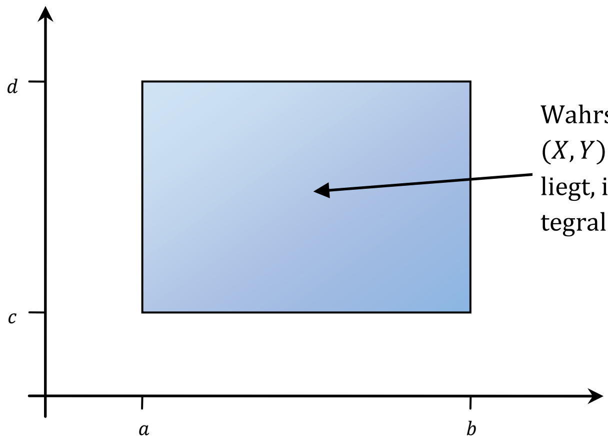
$$\Rightarrow F_{X,Y}(s,t) = \int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{s} f_{X,Y}(u,v)\, du\right) dv$$

X, Y heißt diskret, falls höchstens abzählbar viele Punkte (x_i, y_i) existieren, so dass (X, Y) nur die Werte $p_{i,j} = P\left(X = x_i, Y_{y_i}\right)$ Werte annimmt.

11. $F_{X,Y}(s,t) = P\big((X,Y) \in B\big)$. Allgemeiner:



$$P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = \int_c^d \left(\int_a^b f_{X,Y}(u,v)\, du \right) dv$$



12. RANDDICHTEN

$$\begin{aligned} P(a \leq X < b, Y \text{ beliebig}) &= P\Big(a \leq x < b, \underset{c}{-\infty} < Y < \underset{d}{+\infty}\Big) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_a^b f_{X,Y}(u,v)\, du \right) dv \\ &= \underbrace{\int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,v)\, dv \right) du}_{\text{Funktion von } u} \end{aligned}$$

Also ist

$$f_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\, dv$$

Eine Dichtefunktion von X.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\, dv$$

heißt Randdichte. Entsprechend heißt auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\, du$$

Randdichte = Dichte $f_Y(v)$ von Y.

13. RANDVERTEILUNGEN DISKRETER VEKTOREN

$$p_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \sum_j p_{i,j} = P(X = x_i) \\ q_j &= \sum_i p_{i,j} = P(Y = y_j) \end{aligned}\right\} \text{Randwahrscheinlichkeit}$$

2007-05-24

14. DEFINITION (UNABHÄNGIGKEIT VON ZUFALLSVARIABLEN): Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ Zufallsvariable. Diese heißen unabhängig, falls für $a_i < b_i$ die Ereignisse $\{a_1 \leq X_1 < b_1\}, \dots, \{a_n < X_n < b_n\}$ unabhängig sind für alle $a_i < b_i$.

15. FOLGERUNG: Ist (X, Y) ein stetiger zufälliger Vektor, so sind X und Y unabhängig $\Leftrightarrow$

$$\underbrace{f_{X,Y}(s,t)}_{\substack{\text{gemeinsame}\\ \text{Dichte}}} = \underbrace{f_X(s)}_{\substack{\text{Dichte}\\ \text{von } X}} \cdot \underbrace{f_Y(t)}_{\substack{\text{Dichte}\\ \text{von } Y}}.$$

Ist (X, Y) ein diskreter zufälliger Vektor, so sind X und Y unabhängig $\Leftrightarrow$

$$P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i)P(Y = y_i).$$

BEWEIS (TEILWEISE):

Falls $f_{X,Y}(s,t) = F_X(s)f_Y(t)$ gilt, so sind X und Y unabhängig.

$$\begin{aligned}
P(a \leq X < b, c \leq Y < d) &= \int_c^d \left(\int_a^b f_{X,Y}(s,t)\, ds \right) dt \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b f_X(s) f_Y(t)\, ds \right) dt \\
&= \int_c^d f_Y(t) \left(\int_a^b f_X(s)\, ds \right) dt \\
&= \int_a^b f_X(s)\, ds \cdot \int_c^d f_Y(t)\, dt \\
&= P(a \leq X < b) P(c \leq Y < d).
\end{aligned}$$

Summen unabhängiger Zufallsvariablen: Seien X und Y unabhängig und $X, Y \in \mathbb{N}_0$.

$$p_i = P(X = i), \qquad q_j = P(Y = j)$$

$$\begin{aligned}
P(X + Y = k) &= P\left(\bigcup_{i,j\,:\, i+j=k} \{X = i, Y = j\} \right) \\
&= \sum_{i,j\,:\, i+j=k} P(X = i, Y = j) \\
&= \sum_{i+j=k} p_i q_j \\
&= \sum_{(i=0)}^{k} p_i q_{k-i}
\end{aligned}$$

15A. FALTUNGSFORMEL: Sei $r_k = P(X + Y = k)$ sowie X, Y unabhängig. Daraus folgt

$$r_k = \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}$$

Analog für stetige Zufallsvariable:

16. FALTUNGSFORMEL FÜR DICHTEN: X, Y seien stetige Zufallsvariablen mit den Dichten f_X bzw. f_Y und X und Y seien unabhängig.

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(t-s) f_X(s)\, ds$$

Wir betrachten n Versuche unabhängig:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{im } i\text{-ten Versuch Erfolg} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Y_n = X_1 + \cdots + X_n = \text{Anzahl der Erfolge bei } n \text{ Versuchen}$$

$$P(X_i = 1) = p, \qquad 1 \le i \le n$$

17. SATZ UND DEFINITION: Y_n besitzt eine Binomialverteilung, d. h. Y_n nimmt die Werte $0, 1, \dots, n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(Y_n = k) = b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ an.

BEWEIS:

- $n = 1$ $\quad Y_1 = X_1,\ P(Y_1 = 0) = 1 - p,\ P(Y_1 = 1) = p$
- $n = 2$ $\quad$ $$\begin{aligned} &P(Y_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = (1-p)(1-p) = (1-p)^2 \\ &P(Y_2 = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = p \cdot p = p^2 \\ &P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 0) \\ &= (1-p) \cdot p + p(1-p) = 2p(1-p) \end{aligned}$$

n	$P(Y_n = 0)$	$P(Y_n = 1)$	…	$P(Y_n = n)$
1	$1-p$		…	p
2	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	…	p^2
⋮				
beliebig		$P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		

Induktionsbeweis:

$$Y_{n+1} = \underbrace{Y_n + X_{n+1}}_{\text{unabhängig}}$$

MINIMUM UND MAXIMUM VON ZUFALLSVARIABLEN: Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen

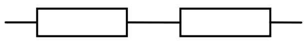
$$\begin{aligned} U(\omega) &= \min\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \\ V(\omega) &= \max\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \\ P(V < t) &= P(X < t, Y < t) \\ &= P(X < t) P(Y < t) \\ &\Rightarrow F_V(t) = F_X(t) F_Y(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(U \le t) &= P(X \ge t, Y \ge t) \\ 1 - F_U(t) &= P(X \ge t) P(Y \ge t) \\ &= \big(1 - F_X(t)\big)\big(1 - F_Y(t)\big) \end{aligned}$$

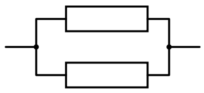
18.

$$\begin{aligned} F_{\max(X,Y)}(t) &= F_X(t) F_Y(t) \\ F_{\min(X,Y)}(t) &= 1 - \big(1 - F_X(t)\big)\big(1 - F_Y(t)\big) \end{aligned}$$

Anwendung auf Reihen- und Parallelschaltung:

a) 

$\min(X, Y) =$ Lebensdauer des Systems

b) 

$\max(X, Y) =$ Lebensdauer des Systems

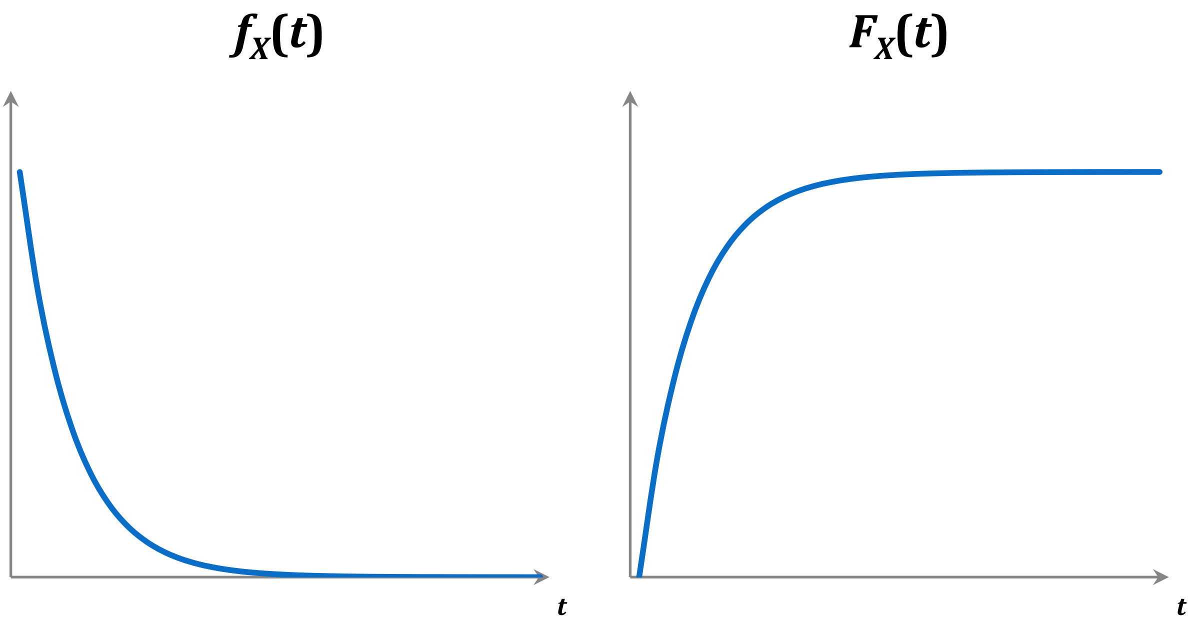
19. DEFINITION: X hat eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 0$, falls X eine stetige Zufallsvariable mit der *Dichte*

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

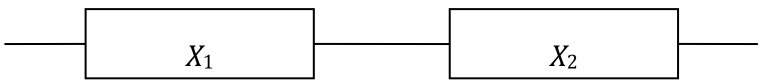
ist.

Verteilungsfunktion:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$



Betrachte:



X_i hat Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda_i > 0$.

$$U = \min(X_1, X_2) = \text{Lebensdauer des Systems}$$

$$\begin{aligned} F_U &= 1 - \Big(\big(1 - F_x(t)\big)\big(1 - F_Y(t)\big) \Big) \\ &= 1 - \Big(1 - \big(1 - e^{-\lambda_1 t}\big)\Big)\Big(1 - \big(1 - e^{-\lambda_2 t}\big)\Big) \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ U hat wieder Exponentialverteilung mit neuem Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.

Verteilung von Funktionen von Zufallsvariablen: $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ = reelle Achse, streng monoton und stetig sowie differenzierbar.

$$\begin{aligned}
Y &= \varphi(X) \\
F_{Y(t)} &= P(Y < t) = P(\varphi(X) < t) \\
&= P\big(X < \varphi^{-1}(t)\big), \qquad\qquad \varphi^{-1} = \text{Umkehrfunktion} \\
&= F_X\big(\varphi^{-1}(t)\big)
\end{aligned}$$

20. SATZ: X habe Verteilungsfunktion F_X, Dichte f_X, φ sei streng monoton und stetig sowie differenzierbar. Dann gilt:

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X\big(\varphi^{-1}(y)\big) & \text{falls } \varphi \text{ wachsend} \\ 1 - F_X\big(\varphi^{-1}(y)\big) & \text{falls } \varphi \text{ fallend} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y)$$

2007-05-31

X sei Zufallsvariable, $Y = \varphi(X)$, φ streng monoton wachsend.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= F_X\left(\varphi^{-1}(t)\right) \\ f_Y &= F_Y^{'}(t) \end{aligned}$$

21. BEISPIEL:

$$\begin{aligned} Y &= aX + b, \qquad a \neq 0 \\ \varphi^{-1}(t) &= \frac{t-b}{a} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \begin{cases} F_X\left(\dfrac{t-b}{a}\right) & \text{für } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\dfrac{t-b}{a}\right) & \text{für } a < 0 \end{cases} \\ f_Y(t) &= \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \end{aligned}$$

22. BEISPIEL: X habe Exponentialverteilung mit Parameter λ, $Y = aX$, $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \frac{1}{a} f_X\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a}\lambda e^{-\frac{\lambda t}{a}} \\ &= \tilde{\lambda} e^{-\tilde{\lambda} t}, \qquad \tilde{\lambda} := \frac{\lambda}{a} \end{aligned}$$

Folglich hat Y wieder eine Exponentialverteilung.

5 NUMERISCHE CHARAKTERISTIKA VON ZUFALLSVARIABLEN

5.1 INTERVALLWAHRSCHEINLICHKEIT

1.

$$P(a \leq Y < b) = \begin{cases} \int\limits_a^b f_X(t)\, dt \\ \sum\limits_{a \leq x_i < b} p(X = x_i) \end{cases}$$

X sei stetig:

$$\begin{aligned} P(x = a) &\leq P\left(a \leq X < a + \frac{1}{n}\right) \\ &= \int\limits_a^{a+\frac{1}{n}} f_X(s)\, ds \quad \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Also gilt: $\forall a: P(X = a) = 0$.

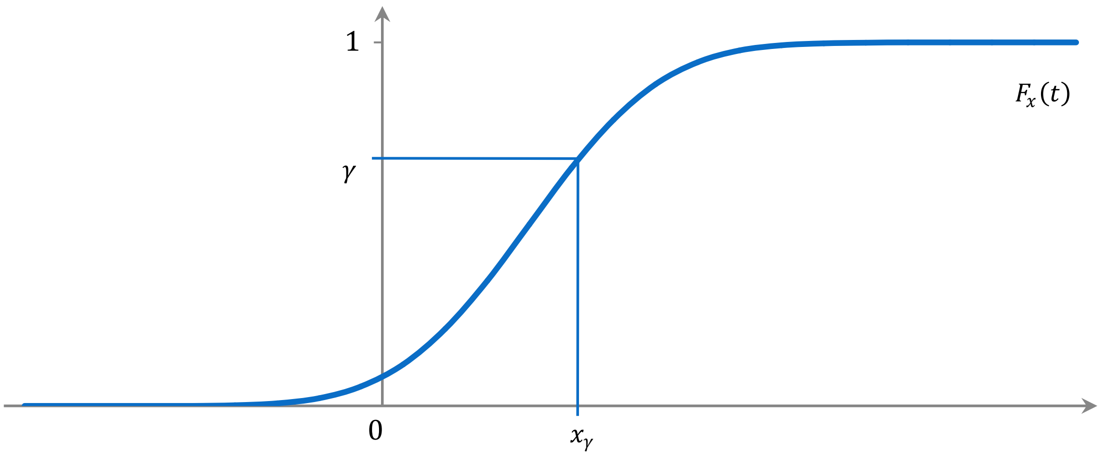
Daraus folgt:

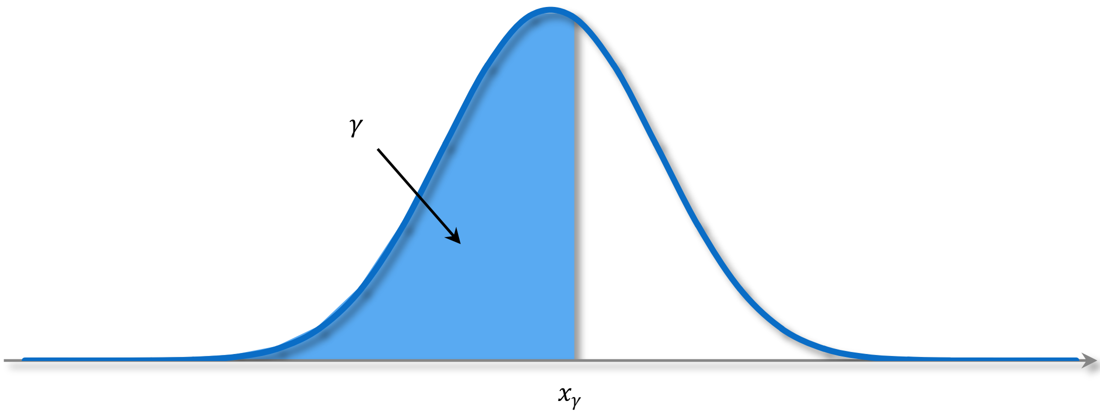
$$P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

Wichtig: X hat Dichte.

5.2 QUANTIL: $0 < \gamma < 1$

2. X sei stetige Zufallsvariable.





γ-Quantil heißt jede Zahl x_γ mit $F_X(x_\gamma) = \gamma$.

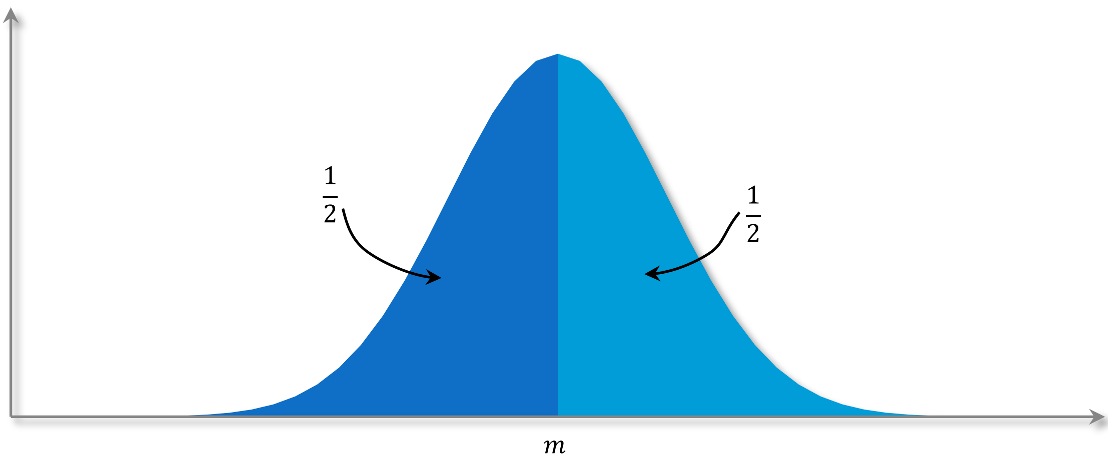
Falls F_x Dichte besitzt, existiert wenigstens ein x_γ, falls F_X dort streng monoton wachsend → gemeinsame Lösung.

BEISPIEL: X habe Exponentialverteilung.

$$\begin{aligned} F_X(t) &= 1 - e^{-\lambda t} = \gamma \\ -\lambda t &= \ln(1-\gamma) \\ e^{-\lambda t} &= 1 - \gamma \\ x_\gamma &= -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\gamma) > 0 \end{aligned}$$

5.3 MEDIAN

3. *Median* ist $\frac{1}{2}$-Quantil. Median $m = x_{\frac{1}{2}}, F_X\left(x_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$.



5.4 ERWARTUNGSWERT

4. DEFINITION: X sei diskrete Zufallsvariable mit Werten $x_1, x_2, \ldots$ und den Einzelwahrscheinlichkeiten

$$p_i = P(X = x_i).$$

Falls $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot p_i < \infty$, so heißt

$$E(X) \underset{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

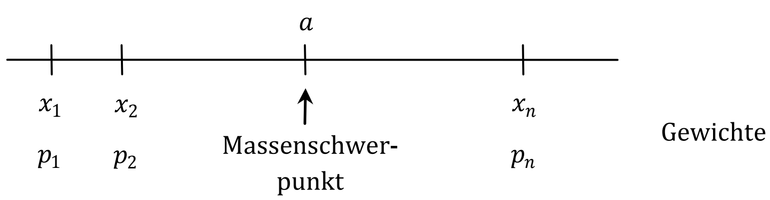
der Erwartungswert[1] von X.

Ist X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X und gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot f_X(t)\, dt < \infty$, so heißt

$$E(X) \underset{\text{Def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\, dt$$

der Erwartungswert von X.

Interpretation als Massenschwerpunkt:



$$a = \sum_i x_i p_i = E(X)$$

5. BEISPIEL: $X =$ Anzahl der Augen von Würfeln

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

6. BEISPIEL: X habe Gleichverteilung in $[a, b]$

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\, dt \\ &= \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a}\, dt \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ &= \frac{1}{2}(b+a) \\ \rightarrow E(X) &= \frac{1}{2}(a+b) \end{aligned}$$

Median $m = \frac{1}{2}(a+b)$ Median von X – Übereinstimmung.

[1] Wird auch mit EX bezeichnet.

7. DEFINITION: X sei Zufallsvariable, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = g(X)$

$$E\big(g(x)\big) = \begin{cases} \sum\limits_{i} g(x_i) p_i & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t)\, dt & \text{falls } x \text{ stetig / } x \text{ hat Dichte} \end{cases}$$

8. DEFINITION: (Erwartungswert von Funktionen zweier Zufallsvariablen)

X, Y Zufallsvariable, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$Z = g(x, y)$ ist wieder Zufallsvariable

$$E\big(g(X,Y)\big) = \begin{cases} \sum\limits_{i,j} g(x_i, y_j) p_{i,j}\,, & p_{i,j} = P\big(X = x_i, Y = y_j\big) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s,t) f_{X,Y}(s,t)\, ds \right) dt \end{cases}$$

9. RECHENREGELN FÜR DEN ERWARTUNGSWERT

a) $E(aX + b) = a\big(E(X)\big) + b,\ \ a, b \in \mathbb{R}$
b) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
c) $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$, falls X und Y unabhängig sind.

BEGRÜNDUNG:

- Zu a) X sei stetig. $Y = aX + b =$ Funktion von X
  Daraus folgt:

$$\begin{aligned} EY = Eg(X) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t)\, dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (at + b) f_X(t)\, dt \\ &= a \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\, dt}_{EX} + b \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\, dt}_{=1} \end{aligned}$$

- Zu c)

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(s,t)}_{st} \underbrace{f_{X,Y}(s,t)\, ds}_{f_X(s) f_Y(t)} \right) dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} s t f_X(s) f_Y(t)\, ds \right) dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} t f_Y(t) \underbrace{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} s f_X(s)\, ds \right)}_{EX} dt \\ &= EX \int\limits_{-\infty}^{\infty} t f_Y(t)\, dt \\ &= (EX)(EY) \end{aligned}$$

5.5 VARIANZ

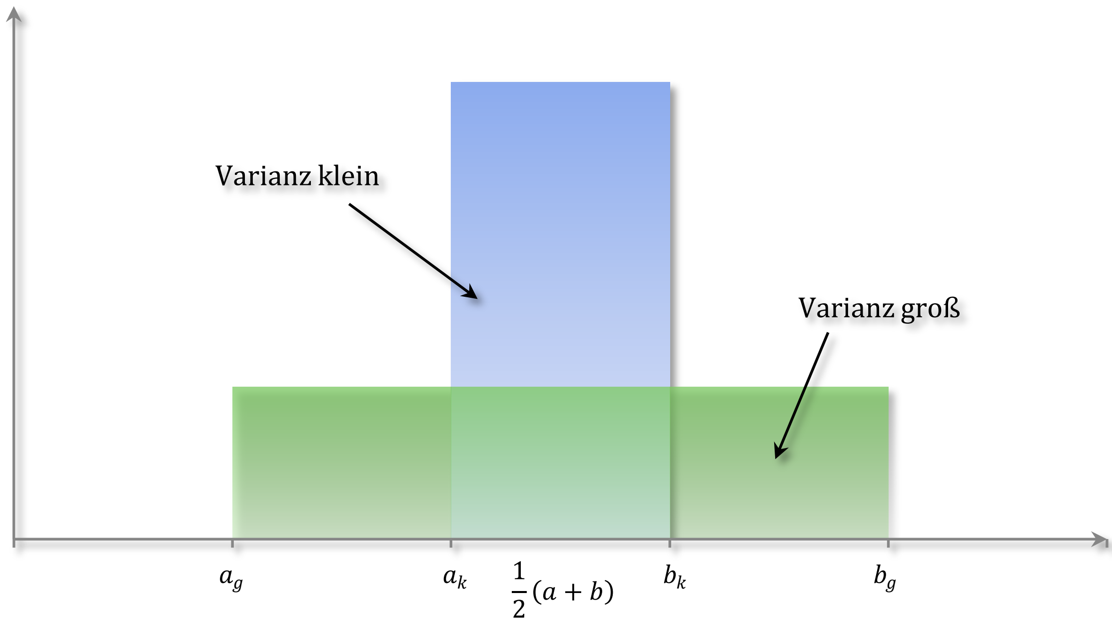
11. BERECHNUNG DER VARIANZ MIT DICHTE BZW. EINZELWAHRSCHEINLICHKEITEN

Sei $\mu = E(X)$

$$V(X) = E(X-\mu)^2 = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 f_X(t)\, dt \end{cases}$$

12. BEISPIEL: X habe Gleichverteilung in $[a,b]$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{2}(a+b)$$
$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 f_X(t)\, dt$$
$$= \frac{1}{12}(b-a)^2$$



2007-06-07

13. RECHENREGELN FÜR DIE VARIANZ

a) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
b) $V(aX+b) = a^2 V(X)$
c) X_1, X_2 unabhängig; $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$
d) $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängig mit gleicher Dichte bzw. Einzelwahrscheinlichkeit;
Behauptung: $V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} V(X_i) = \cdots = \frac{1}{n} V(X_n)$

BEGRÜNDUNG: $\mu = E(X)$

a)

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X-\mu)^2 \\ &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu \underbrace{E(X)}_{\mu} + E(\mu^2) \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= E\big((aX+b) - E(aX+b)\big)^2 \\ &= E(aX + b - aE(X) - B)^2 \\ &= a^2 E\big(X - E(X)\big)^2 \\ &= a^2 V(X). \end{aligned}$$

c) $EX_i \coloneqq \mu_i$, a) anwenden

$$\begin{aligned} V(X_1 + X_2) &= E(X_1 + X_2)^2 - (\overbrace{E(X_1 + X_2)}^{\mu_1 + \mu_2})^2 \\ &= E(X_1^2 + X_1 X_2 + X_2^2) - (\mu_1 + \mu_2)^2 \\ &= E(X_1^2) + 2 \cdot E(X_1 \cdot X_2) + E(X_2^2) - \mu_1^2 - \mu_2^2 - 2\mu_1\mu_2 \\ EX_1X_2 &\underset{\text{unabh.}}{=} E(X_1) \cdot E(X_2) = \mu_1 \mu_2 \\ &= V(X_2) + V(X_2) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot V(X_1) \\ &= \frac{1}{n} V(X_1) \end{aligned}$$

5.6 STANDARDABWEICHUNG

14. STANDARDABWEICHUNG EINER ZUFALLSVARIABLE X

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{V(X)} \text{ Standardabweichung} \\ Y &= \frac{X-\mu}{\sigma} \to E(Y) = 0 \\ V(Y) &= \frac{1}{\sigma^2} V(X-\mu) = 1 \end{aligned}$$

15. DEFINITION: X_1, X_2 Zufallsvariable. Dann heißt

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) \underset{\text{Def.}}{=} E\big((X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\big)$$

die *Kovarianz* und

$$\varrho_{X_1,X_2} = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

heißt *Korrelationskoeffizient*.

$$\mu_i = EX_i, \qquad \sigma_i^2 = V(X_i)$$

16. EIGENSCHAFTEN DER KOVARIANZ UND KORRELATION

a) $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\operatorname{cov}(X_1, X_2)$
b) X_1, X_2 unabhängig $\rightarrow \operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0,\ \varrho_{X_1,X_2} = 0$
c) $-1 \leq \varrho_{X_1,X_2} \leq 1$

Begründung:

a)
$$\begin{aligned} E\big((X_1 + X_2) - (\mu_1 + \mu_2)\big)^2 &= E\big((X_1 - \mu_1) + (X_2 - \mu_2)\big)^2 \\ &= E((X_1 - \mu_1)^2 + 2(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) + (X_2 - \mu_2)^2) \\ &= V(X_1) + 2\operatorname{cov}(X_1, X_2) + V(X_2) \end{aligned}$$

17. BEMERKUNG: X_1, X_2 unabhängig $\rightarrow \varrho_{X_1,X_2} = 0$; aber $\varrho_{X_1,X_2} = 0 \nRightarrow X_2, X_2$ unabhängig

6 SPEZIELLE DISKRETE UND STETIGE VERTEILUNGEN

6.1 0-1-VERTEILUNG

1. X hat 0-1-Verteilung, falls $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \qquad EX = 0\cdot(1-p)+1\cdot p = p$$

$$V(X)=E(X^2)-(EX)^2 = 0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p - p^2 = p(1-p)$$

2. $X_1, X_2, \dots, X_n$ seien unabhängig und 0-1-verteilt.

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{Anzahl der Erfolge Binomialvert.}$$

$$EY_n = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

$$V(Y_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

3. Schon bekannt: $b_{n,\frac{\lambda}{n}}(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ (poissonscher Grenzwertsatz)

$$\begin{aligned} b_{n,\frac{\lambda}{n}}(k) &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k\text{ mal}}}{\underbrace{n\cdot\ldots\cdot n}_{k}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\ \pi_\lambda(k) &= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \end{aligned}$$

6.2 POISSONVERTEILUNG

4. DEFINITION: X hat Poissonverteilung, falls X die Werte $0, 1, \dots$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$\pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-k}$$

annimmt.

5. POISSONVERTEILUNG $E(X)=\lambda,\ V(X)=\lambda$

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + 3 \cdot \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} + \cdots \\
&= \lambda e^{-\lambda} + \lambda^2 e^{-\lambda} + \frac{\lambda^3}{2!} e^{-\lambda} + \cdots \\
&= \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots\right)}_{e^{\lambda}} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

Betrachten wir eine Folge von Versuchen $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$
\begin{aligned}
X_i &= \begin{cases} 1 & \text{im } i\text{-ten Versuch Erfolg} \\ 0 & \text{im } i\text{-ten Versuch Mißerfolg} \end{cases} \\
Y &= \text{Zeitpunkt des ersten Erfolges} \\
\{Y = k\} &= \{X_0 = 0\} \cap \{X_1 = 0\} \cap \ldots \cap \{X_{k-1} = 0\} \cap \{X_k = 1\} \\
P(Y = k) &= (1-p)^k p, \qquad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(1-p)}_{q} \cdot p = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1
$$

6.3 GEOMETRISCHE VERTEILUNG

6. DEFINITION: Y hat geometrische Verteilung mit dem Parameter $0 < p < 1$, falls

$$
P(Y = k) = (1-p)^k \cdot p, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots
$$

7. $P(Y = k + 1 | Y \geq k) = P(Y = 0)$ weil

$$
\begin{aligned}
\frac{P(Z = k+1, Y \geq k)}{P(Y \geq k)} &= \frac{P(X_0 = 0, X_1 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1)}{P(X_0 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0)} \\
&= \frac{(1-p)^k p}{(1-p)^k} = p \\
P(Y = 0) = P(X_0 = 1) = p
\end{aligned}
$$

6.4 GLEICHVERTEILUNG

8. X hat Gleichverteilung in $[a, b]$, falls X Dichte

$$
f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

besitzt.

$$
EX = \frac{1}{2}(a+b), \qquad V(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2
$$

$$
F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & a < t < b \\ 1 & t \geq b \end{cases}
$$

6.5 EXPONENTIALVERTEILUNG

9. X hat Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$, X hat Dichte

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

sowie die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

Daraus ergibt sich der Erwartungswert

$$EX = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}$$

Und die Varianz:

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Median: $F_X(t) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda t} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} &= e^{-\lambda t} \\ \rightarrow m &= \frac{1}{\lambda} \ln 2 \end{aligned}$$

10. Nichtalterung der Exponentialverteilung

$$\begin{aligned} P(\underbrace{t \le X \le t + h}_{\text{Ausfall in } [t, t+h)} | \underbrace{X \ge t}_{\text{unter der Bedingung bis } t \text{ gearbeitet}}) &= \frac{P(\{t \le X < t + h\} \cap \{X \ge t\})}{P(X \ge t)} \\ &= \frac{P(t \le X < t + h)}{1 - F_X(t)} \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda(t+h)} - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= F_X(h) = P(X < h) \end{aligned}$$

$$P(t \le X \le t + h | X \ge t) = P(X < h)$$

2007-06-15

6.6 NORMALVERTEILUNG

11. DEFINITION: Eine Zufallsvariable X besitzt eine Normalverteilung mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$, falls X folgende Dichte hat:

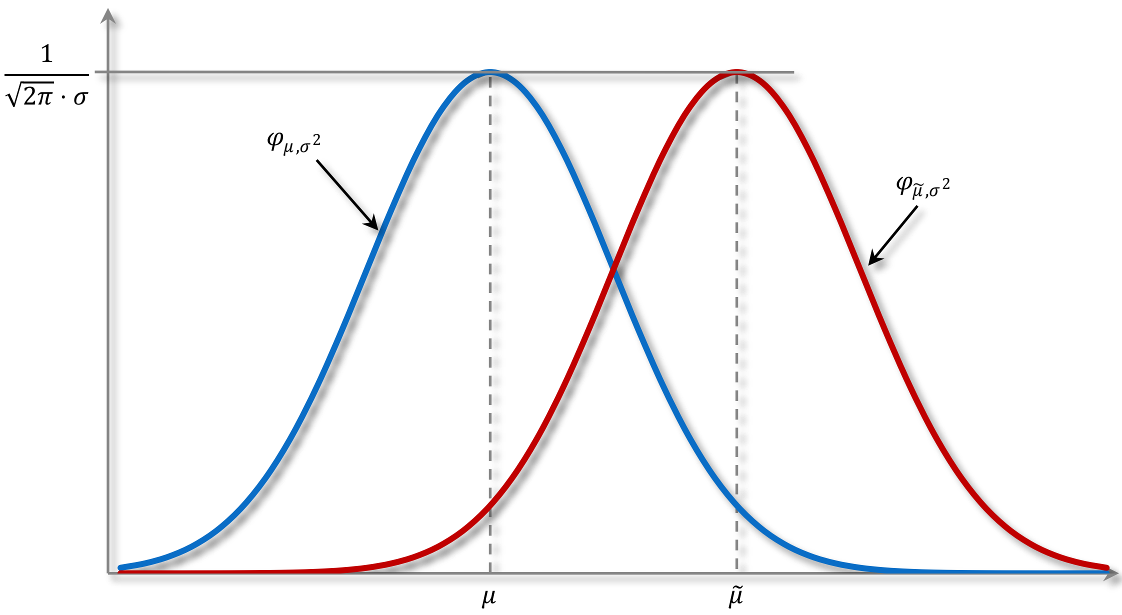
$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Verteilungsfunktion:

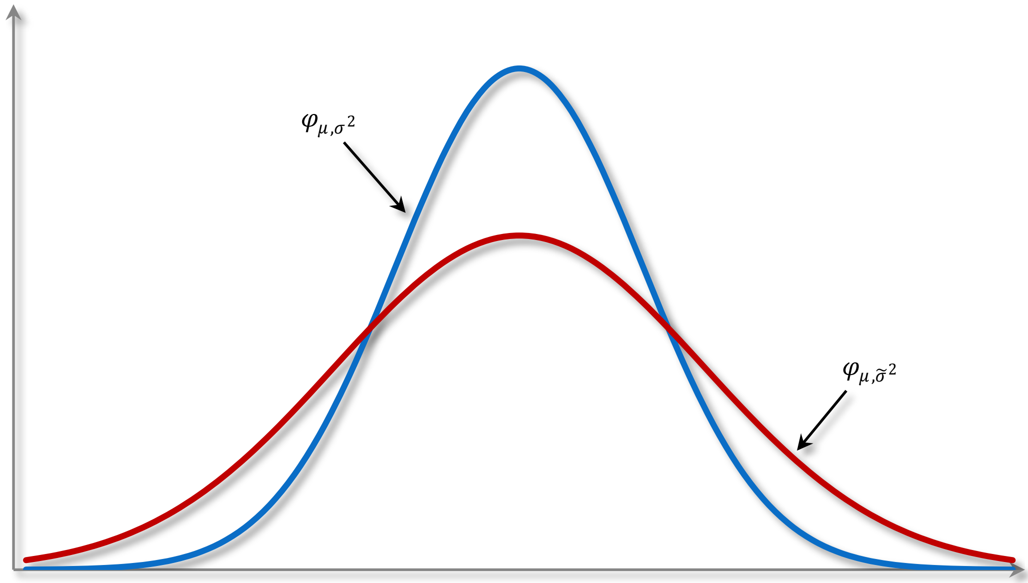
$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi_{\mu,\sigma^2}(s)\, ds$$

X heißt standardnormalverteilt, falls $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. Bezeichnung: $X \sim \Phi_{\mu,\sigma^2}$ bzw. $X \sim \Phi_{0,1}$.

Bild:



$\mu < \tilde{\mu}, \qquad \sigma^2$ gleich



$$\sigma^2 < \tilde{\sigma}^2, \qquad \mu \text{ gleich}$$

12. STATISTISCHE BEDEUTUNG DER PARAMETER:

$$X \sim \Phi_{\mu,\sigma^2} \Rightarrow E(X) = \mu, V(X) = \sigma^2$$

BEWEIS:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\varphi_{\mu,\sigma^2}(t)\, dt = \mu$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 \varphi_{\mu,\sigma^2}(t)\, dt = \sigma^2$$

Weiterhin ist μ auch der Median, bzw. das $\frac{1}{2}$-Quantil.

13. Falls $X \sim \Phi_{\mu,\sigma^2}$,

$$Y = aX + b$$

$$\Rightarrow Y \sim \Phi_{a\mu+b,a^2\sigma^2}$$

Insbesondere gilt für $X \sim \Phi_{\mu,\sigma^2}$, dann $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \Phi_{0,1}$ standardnormalverteilt.

Begründung: $a = \frac{1}{\sigma},\ b = -\frac{\mu}{\sigma}$

$$\Rightarrow a\mu + b = \frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma} - =$$

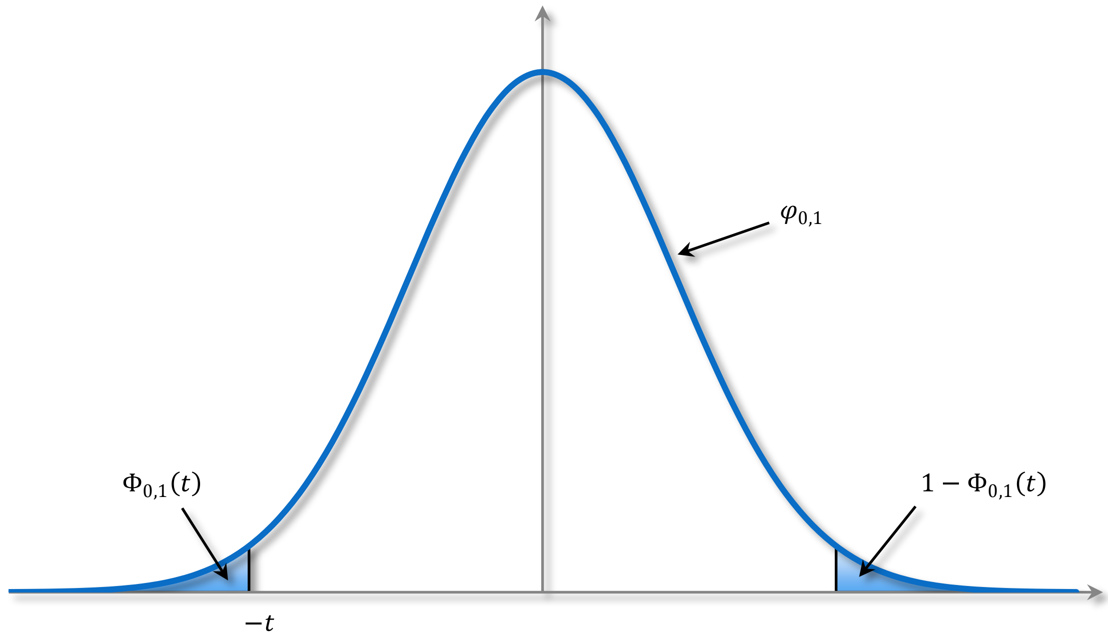
$$a^2\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

14. INTERVALLWAHRSCHEINLICHKEIT:

$$X \sim \Phi_{\mu,\sigma^2}$$

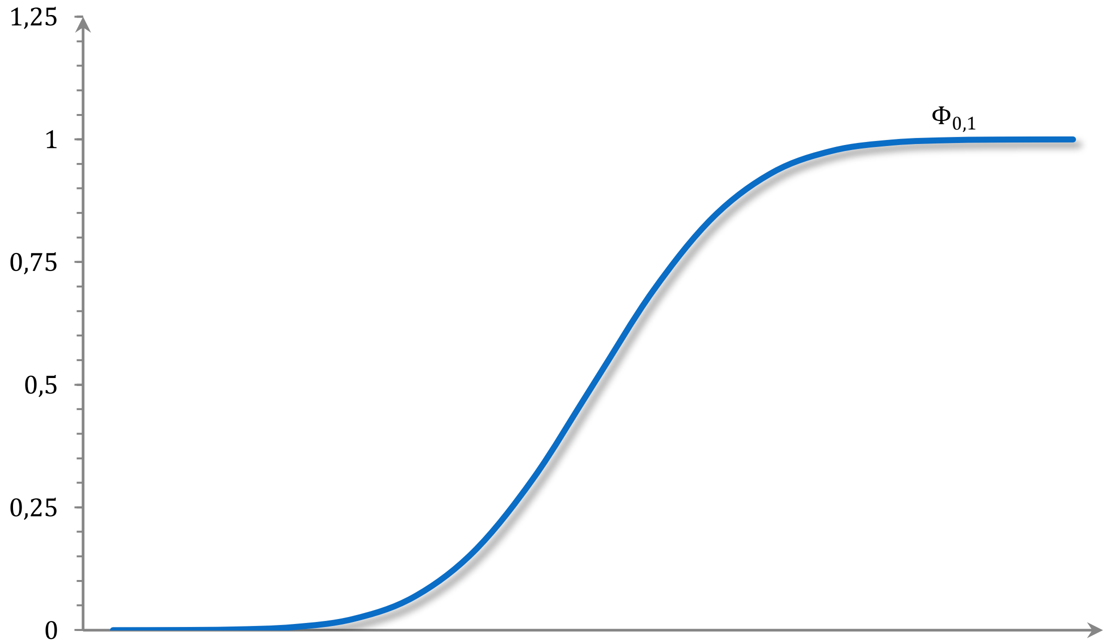
$$
\begin{aligned}
P(a \le X, b) &= P(a - \mu \le X - \mu < b - \mu) \\
&= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi_{0,1}\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

15. SYMMETRIEEIGENSCHAFT:



$$\Phi_{0,1}(-t) = 1 - \Phi_{0,1}(t)$$

Entsprechend Dichte:



16. 3σ-REGEL:

$$\begin{aligned} P(|X-\mu| \le k\sigma) &= P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \le k\right) \\ &= P(-k \le Z \le k) \\ &= \Phi_{0,1}(k) - \Phi_{0,1}(-k) \\ &= \Phi_{0,1}(k) - \left(1 - \Phi_{0,1}(k)\right) \\ &= 2\Phi_{0,1}(k) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) &= 0{,}68269 \\ P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) &= 0{,}95450 \\ P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) &= 0{,}9973 \end{aligned}$$

17. SUMMEN UNABHÄNGIGER ZUFALLSVARIABLE:

X_1, X_2 unabhängig, $X_i \sim \Phi_{\mu_i,\sigma_i^2}$

Dann gilt:

$$X_1 + X\_2 \sim \Phi_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

Beweis beruht auf

$$f_{X_1+X_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(t-s) \cdot f_{X_1}(s)\, ds$$

Allgemein:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mu_2,\sigma_2^2}(t-s) \cdot \varphi_{\mu_1,\sigma_1^2} = \varphi_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(t)$$

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ Zufallsvariable und es sei bekannt: $X_i \sim \Phi_{\mu,\sigma^2}$, für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt:

μ lässt sich durch $X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ schätzen.

Gesucht: $P(|\bar{X}_n - \mu| \ge \varepsilon)$. Lösung: $\bar{X}\_n \sim \Phi_{\mu,\sigma^2}$

Begründung: $V\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \gamma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \gamma^2 = \frac{1}{n} \cdot \gamma^2$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \ge \varepsilon) = P\left(\left|\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \ge \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right), \qquad Z := \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|Z| \ge \frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 0$$

7 GRENZWERTSÄTZE DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

7.1 UNGLEICHUNGEN

1. TSCHEBYSCHEFF'SCHE UNGLEICHUNG

Sei Z Zufallsvariable mit $E(Z) = \mu,\ V(Z) = \sigma^2$, dann gilt:

$$P(|Z-\mu| \geq \varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sigma^2$$

2. HÖFFDING'SCHE UNGLEICHUNG

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable und $\forall i: P(X_i = 0) = 1-p,\ P(X_i = 1) = p$, sowie $\bar{X}_n$ die relative Häufigkeit des Erfolgs. Dann gilt:

$$P(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\cdot\varepsilon^2}$$

3. SCHWACHES GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt (gleiche Dichten/Einzelwahrscheinlichkeiten), dann gilt:

$$\mu = E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n)$$

Behauptung: $\bar{X}_n$ strebt stochastisch gegen μ, d. h.

$$\forall\varepsilon \in (0,\infty): \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

Dies ist keine Zahlenkonvergenz, sondern eine „stochastische Konvergenz", d. h. eine Beschreibung eines allgemein zu erwartenden Trends, d. h. die Wahrscheinlichkeit einer Verletzung strebt gegen 0.

Begründung: $Z = \bar{X}_n$ nach Tschebyscheff'scher Ungleichung

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} = \lim_{n\to\infty} V(\bar{X}_n) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot V(X_1) = 0$$

STARKES GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1$$

4. BERNOULLI'SCHES GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN

Seien n Versuche, Ereignis A

$$\forall i: X_i = \begin{cases} 1 & A \text{ eingetreten} \\ 0 & A \text{ nicht eingetreten} \end{cases}$$

sowie $H_n(A)$ ist die relative Häufigkeit von $A = \bar{X}_n$, dann gilt:

$$p = P(A) = P(X_i = 1)$$

$H_n(A)$ strebt stochastisch gegen p in dem Sinne, dass

$$P(|H_n(A) - p| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Begründung: folgt aus Höffding'scher Ungleichung

2007-06-21

Gesetz der großen Zahlen:

$\bar{X}_n \to \mu = EX_1$ stochastisch

Jetzt analysieren wir $\bar{X}_n - \mu \to 0$

Betrachten wir $\underbrace{\sqrt{n}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(\bar{X}_n - \mu)}_{\to 0}$ oder

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu$$

Betrachten wir die normierte Summe

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu$$
$$E(Y_n) = 0$$
$$V(Y_n) = \frac{1}{\sigma^2 n} \sum_{i=1}^{n} V(X_i - \mu)$$
$$= \frac{1}{\sigma^2 n} \cdot n\sigma^2 = 1$$

5. ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Falls $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable sind mit

$$E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2,$$

dann gilt

$$F_{Y_n}(t)\& = P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) < t\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_{0,1}(t) = \text{Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung}$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Approximation ist schon gut für $n > 30$.

Anwendung: $X_1, X_2, \dots, X_n$. Suchen

$$P(a \le X_1 + X_2 + \cdots + X_n < b) = P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu$$

$$\text{Gesuchte Wahrscheinlichkeit} = F_{Y_n}\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - F_{Y_n}\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Jetzt $F_{Y_n}(t) \approx \Phi_{0,1}(t)$.

Ergebnis:

6. $P(a \leq X_1 + \cdots + X_n < b) \approx \Phi_{0,1}\left(\frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$

Speziell: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig. $P(X_i = 0) = 1 - p, P(X_i = 1) = p$.

$X_1 + \cdots + X_n =$ Gesamtanzahl der Erfolge hat Binomialverteilung mit Parameter n, p.

7. GRENZWERTSATZ VON MOIVRE-LAPLACE

$$Z_n = X_1 + \cdots + X_n, \qquad X_i \text{ wie oben}$$

Z_n binomialverteilt.

Behauptung:

$$P\left(\frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_{0,1}(t)$$

8. APPROXIMATION DER BINOMIALVERTEILUNG DURCH DIE NORMALVERTEILUNG

Z_n habe Binomialverteilung. Gesucht:

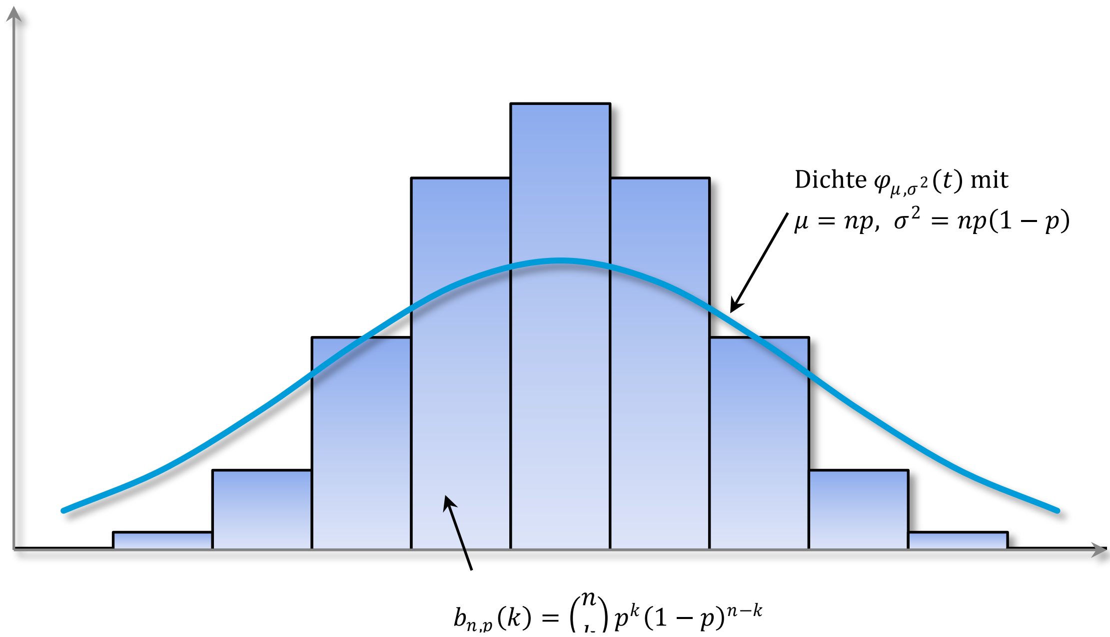
$$P(a \leq Z_n < b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Ergebnis:

$$P(a \leq Z_n \leq b) \approx \Phi_{0,1}\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Stetigkeitskorrektur:

$$P(a \leq Z_n \leq b) \approx \Phi_{0,1}\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$



8 MATHEMATISCHE STATISTIK

Die Statistik bildet eine Brücke zwischen Daten und der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Statistik liefert Aussagen über benötigte Parameter und bei Entscheidungen, die auf zufallsbehafteten Werten beruhen.

1. DEFINITION: Grundgesamtheit = Zufallsvariable einschließlich Dichte bzw. Einzelwahrscheinlichkeiten.

Modell: Versuch läuft ab, $\omega \in \Omega$ wird von Natur oder Gerät ausgewählt. Wir beobachten $X(\omega) =$ Zahl = „Realisierung" (konkreter Wert).

Bei zweitem Versuch $\omega_1 \in \Omega$; Beobachtung $X(\omega_1)$.

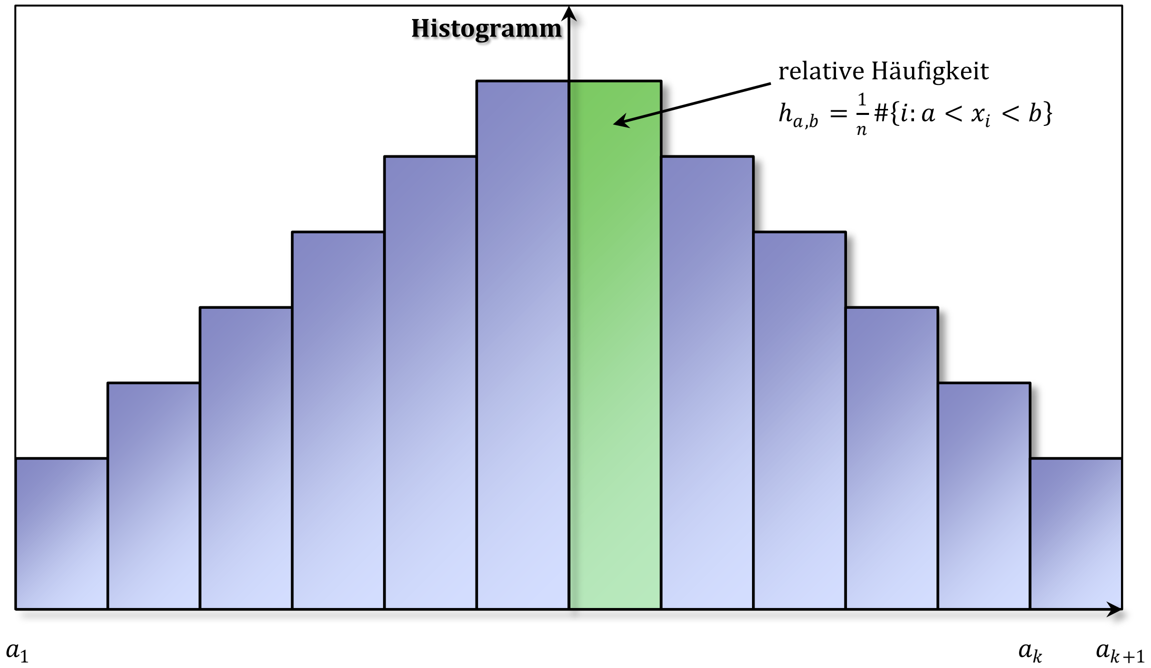
$X(\omega), \omega \in \Omega$ Gesamtheit aller konkreten Beobachtungen.

2. DEFINITION: Eine mathematische Stichprobe vom Umfang n ist die Gesamtheit von n unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$. Die Realisierung $x_1 = X_1(\omega), \dots, x_n = X_n(\omega)$ heißen die konkrete Stichprobe.

Modellbildung: Messung von Umfang $n, x_1, \dots, x_n$. Übersichtliche Darstellung

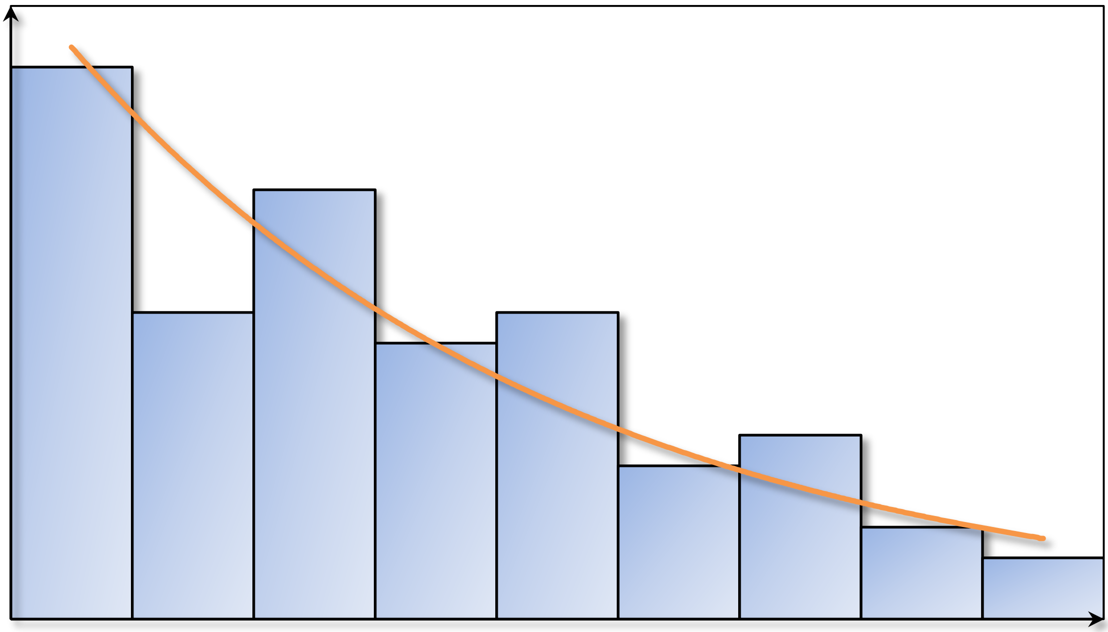
Klassen bilden: $(-\infty, a_0], (a_0, a_1], \dots, (a_{k-1}, a_k], (a_k, \infty)$

Histogramm:



Gleiche Länge, nicht mehr als 20 Intervalle.

Die Wahl der Dichte erfolgt so, dass sie gut zum Histogramm passt.



2007-06-28

8.1 SCHÄTZEN VON PARAMETERN

MAXIMUM-LIKELIHOOD-SCHÄTZER

$X_1, X_2, \dots, X_n$ Beobachtung, z. B. Anzahl von Unfällen in den Jahren $1, \dots, n$. Schon bekannt, dass X_i diskrete Verteilung besitzen $P_k(\theta)$, θ unbekannter Parameter. Konkrete Stichprobe $k_1, \dots, k_n$.

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = P_{k_1}(\theta) \cdot \dots \cdot P_{k_n}(\theta) = P(X_1 = k_1) \cdot \dots \cdot P(X_n = k_n)$$

Der plausibelste Wert $\hat{\theta}$ ergibt sich durch Maximieren des Produktes $\prod_i P_{k_i}(\theta)$. Weil der Logarithmus eine monoton wachsende Funktion ist, kann man auch $\ln\left(\prod_i P_{k_i}(\theta)\right) = \sum_{i=1}^n \ln P_{k_i}(\theta)$ verwenden.

3. BEISPIEL: Voraussetzung: $X_1, \dots, X_n$ haben Poissonverteilung

$$P(X_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad \lambda \text{ unbekannt}$$

Likelihood-Funktion

$$L(k_1, \dots, k_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda} = P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n)$$

$$\ln L(k_1, \dots, k_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n (k_i \ln \lambda - \ln(k_i!) - \lambda) \qquad \rightarrow Max$$

Suchen wir das Maximum für $\ln L$:

$$(\ln L)' = \sum_{i=1}^n \left(\frac{k_i}{\lambda} - 1\right) = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n k_i - n = 0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$$

Falls $X_1, \dots, X_n$ stetige Daten mit der Dichte $f_\theta(t)$, θ Parameter sowie $x_1, \dots, x_n$ konkrete Stichprobe ist, so gilt:

Likelihood-Funktion:

$$L(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{Beobachtung}}, \theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)$$

4. DEFINITION: Unter einer Maximum-Likelihood-Schätzfunktion $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ versteht man eine Funktion der Beobachtungen $x_1, \dots, x_n$ mit der Eigenschaft

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) \leq L\left(x_1, \dots, x_n, \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)\right),$$

wobei $\hat{\theta}$ Maximumstelle der Likelihoodfunktion $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$ als Funktion von θ.

BEMERKUNG: Zur Bestimmung der Maximumstelle ist auch die Maximierung von $\ln L$ anstelle von L möglich.

5. $X_1, \dots, X_n$ seien normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2.

Likelihood-Funktion: $L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\mu,\sigma^2}(x_i)$

$$\ln L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^{n} \ln \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}}\right)}_{\varphi_{\mu,\sigma^2}(x_i) = \text{Normalverteilung, Dichte}}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0$ auflösen

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2$$
$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

6. FOLGERUNG: Liegt eine Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ aus einer normalverteilten Gesamtheit vor, so sind $\hat{\mu} = \bar{x}_n$ und $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$ die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion.

Zunächst ist eine Schätzfunktion $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ eine Funktion der Daten. *Was ist sinnvoll?*

7. DEFINITION: $\hat{\theta}$ heißt erwartungstreu, falls $E(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \theta$, wobei $X_1, \dots, X_n$ die Dichte $f_0(t)$ bzw. die Einzelwahrscheinlichkeiten $p_k(\theta)$ haben.

8. BEISPIEL: $X_1, \dots, X_n$ sei eine Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit.

$$\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
$$E\big(\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n)\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu.$$

$\hat{\mu}$ ist erwartungstreu.

$$E\big(\hat{\sigma}^2(X_1, \dots, X_n)\big) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$$

$\hat{\sigma}^2$ ist nicht erwartungstreu.

Aber $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$:

$$E(S^2) = E\left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{n}{n-1} \cdot E(\sigma^2) = \sigma^2$$

S^2 ist erwartungstreuer Schätzer für σ^2.

Bisherige Schätzungen waren Punktschätzungen, d. h. aus den Daten wird ein Wert als Schätzwert berechnet.

9. DEFINITION: Unter einem Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ ($\alpha \in (0,1)$) oder zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1-\alpha$ versteht man zwei Funktionen $G_1(X_1,\dots,X_n) \leq G\_2(X_1,\dots,X_n)$ mit folgender Eigenschaft:

$$P\big(G_1(X_1,\dots,X_n) \leq \Theta \leq G_2(X_1,\dots,X_n)\big) = 1-\alpha$$

oder

$$P(\Theta \in [G_1(X_1,\dots,X_n), G_2(X_1,\dots,X_n)]) = 1-\alpha$$

Liegt eine konkrete Stichprobe vor, so erhält man zwei konkrete Schranken $g_1 = G_1(x_1,\dots,x_n)$ und $g_2 = G_2(x_1,\dots,x_n)$, $[g_1, g_2]$, statt einer Wahrscheinlichkeit. D. h. entweder $\Theta \in [g_1, g_2]$ oder $\Theta \notin [g_1, g_2]$.

Aber bei mehrfacher Wiederholung nähert sich die relative Häufigkeit, dass der Parameter in dem bestimmten Intervall liegt, $1-\alpha$ an.

10. Beispiel: $X_1,\dots,X_n$ sei eine Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit; $X_i \sim \varphi_{\mu,\sigma^2}$. Dann gilt: $\bar{X}_n \sim \varphi_{\mu,\frac{\sigma^2}{n}}$.

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} = Z$$

Z standardnormalverteilt.

9 STATISTISCHE TESTS

Beispiel 1: Wellen werden produziert; geprüft werden soll, ob Nennmaß eingehalten wird.

Beispiel 2: Kontrolle, ob ein Ausschussanteil nicht überschritten wird.

Beispiel 3: Prüfen, ob zwei verschiedene Medikamente sich in ihrer Wirkung unterscheiden oder nicht.

Beispiel 4: Bauteil wird produziert, Nennmaß $\mu_0 = 4$ mm bekannt. $\sigma^2 = 9 \cdot 10^{-6}$, $n = 25$ Messungen, $\bar{X}_n = 4{,}0012$.

$\frac{\bar{X}-4}{\sigma}\sqrt{25}$ standardnormalverteilt, falls 4 der wahre Wert.

Eine standardnormalverteilte Zufallsvariable schwankt mit großer Wahrscheinlichkeit in $[-3, 3]$. Hier besteht kein schwerer Verdacht auf eine systematische Abweichung.

HYPOTHESEN: Aussagen über einen Parameter. Geprüft wird, ob das Datenmaterial dieser Aussage widerspricht oder nicht.

Vorgehen:

A) Aufstellen der Hypothese.
$H_0: \theta = \theta_0,\ H_A: \theta \neq \theta_0$ zweiseitige Fragestellung
$\left.\begin{array}{l} H_0: \theta \leq \theta_0,\ H_A: \theta > \theta_0 \\ H_0: \theta \geq \theta_0,\ H_A: \theta < \theta_0 \end{array}\right\}$ einseitige Fragestellung

2007-07-06

FEHLER BEI STATISTISCHEN TESTS

	H_0 angenommen	*H_0 abgelehnt*
H_0 richtig	kein Fehler	Fehler 1. Art
H_0 falsch	Fehler 2. Art	kein Fehler

↑ Natur

← Entscheidung mithilfe von Daten. Beide Fehlerwahrscheinlichkeiten können nicht gleichzeitig klein gehalten werden.

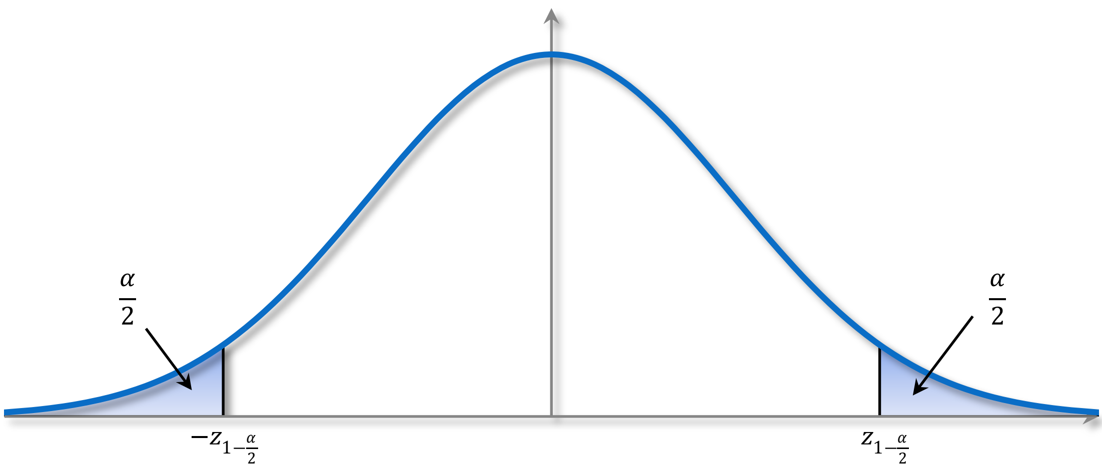
Deshalb nur Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art klein $\leq \alpha = 0{,}05; 0{,}01; \ldots$

Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art unbekannt. Dies ist das Konzept des α-Tests.

B) Testgröße aufstellen. Diese Testgröße ist in der Regel die Schätzung des unbekannten Parameters, verglichen mit hypothetischem Wert θ_0, eventuell noch gewisse Normierungen.
C) Aufstellen des kritischen Bereiches. Dieser kritische Bereich wird so gewählt, dass die Testgröße unter der Nullhypothese nur mit einer Wahrscheinlichkeit von α im kritischen Bereich liegt
D) Aus Daten und Messungen heraus, die vorliegen, wird der Wert der Testgröße berechnet und eine Entscheidung getroffen. Liegt der Wert im kritischen Bereich, so folgt daraus, dass H_0 abgelehnt wird. Liegt der Wert hingegen nicht im kritischen Bereich, so lehnen wir H_0 nicht ab.

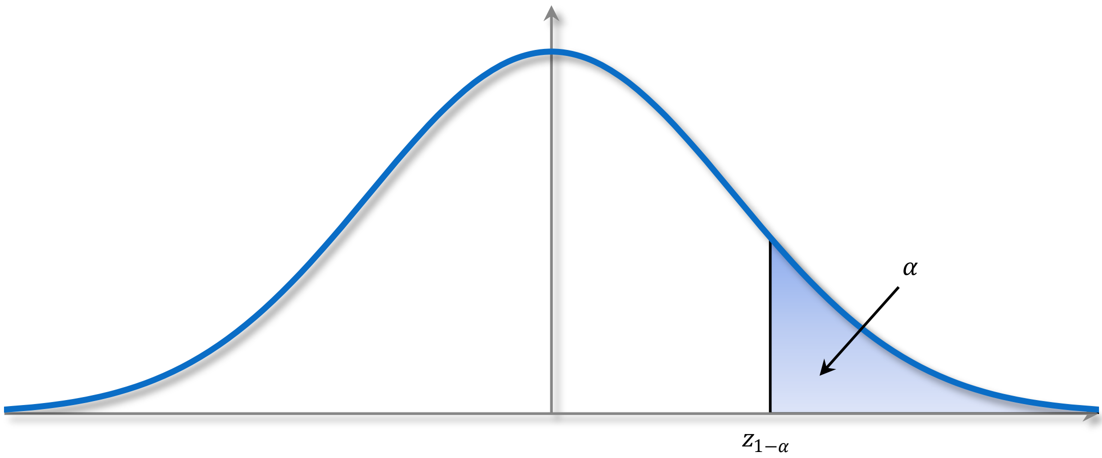
PRÜFEN VON μ BEI BEKANNTEM σ^2

A) $H_0: \mu = \mu_0,\ H_A: \mu \neq \mu_0$ zweiseitige Fragestellung; Abweichung von Normwert
$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu \leq \mu_0,\ H_A: \mu > \mu_0 \\ H_0: \mu \geq \mu_0,\ H_A: \mu < \mu_0 \end{array}\right\}$ zwei einseitige Fragestellungen
B) $\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = U$ unter H_0 standardnormalverteilt
C) Kritischer Bereich, im ersten Fall: $\mu = \mu_0$ gegen $\mu \neq \mu_0$



$$H_0\colon \mu \le \mu_0, \qquad H_A\colon \mu > \mu_0, \qquad U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}$$

Ist n großund μ der wahre Erwartungswert – es gilt also H_A – so folgt: U nimmt große Werte an → kritischer Bereich ist „weit rechts".



$H_0\colon \mu \ge \mu_0$, $H_A\colon \mu < \mu_0$ entsprechend

D) Wert von U berechnen; Entscheidung treffen
H_0 ablehnen: große Sicherheit
H_0 annehmen: Fehlerwahrscheinlichkeit unbekannt

BEISPIEL: Messung der Anzahl der Drehungen eines Garns

$n = 16$, $\mu_0 = 250\ \frac{\text{Drehungen}}{\text{Meter}}$

$\sigma^2 = 144$ bekannt

$\bar{X}_n = 245{,}2$

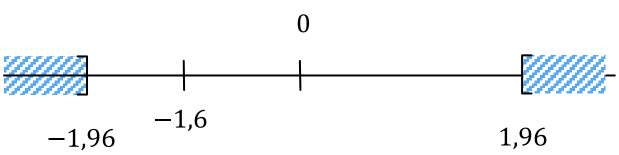
Geprüft werden soll nun die Abweichung vom Normwert μ_0.

A) $H_0\colon \mu = \mu_0$, $H_A\colon \mu \ne \mu_0$

B) $U = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{245{,}2 - 250}{12}\sqrt{16} = -1{,}60$

C) Kritischer Bereich, $\alpha = 0{,}05$ (gegeben), $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$ (nach Tabelle)

$$K = (-\infty; -1{,}96) \cup (1{,}96; \infty)$$



D) Wert von $U = -1{,}60$ liegt nicht im kritischen Bereich. Folglich lehnen wir H_0 nicht ab.

BEISPIEL FÜR EINSEITIGE FRAGESTELLUNG: Druckfestigkeit einer Betonsorte soll geprüft werden: $\sigma^2 = 6{,}76$ ist bekannt

$$n = 10$$
$$\bar{X} = 22{,}8$$
$$\text{Mindestfestigkeit } \mu_0 = 28$$

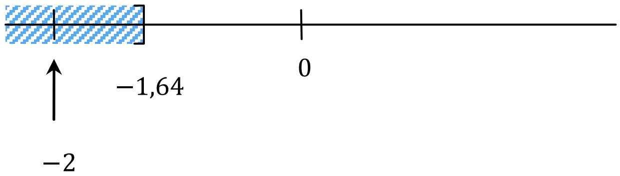
Frage: Wird die Druckfestigkeit deutlich unterschritten?

A) $H_0\colon \mu \geq \mu_0,\ H_A\colon \mu < \mu_0$

B) Teststatistik: $U = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = -2$

C) Kritischer Bereich $K = (-\infty, -Z_{1-\alpha})$

$$\alpha = 0{,}05 \quad Z_{1-\alpha} = 1{,}64$$
$$K = (-\infty; -1{,}64)$$



D) Ablehnen der Nullhypothese. Wert von U berechnen, $U = -2$

σ^2 UNBEKANNT, TESTS ÜBER μ.

A) $H_0\colon \mu = \mu_0,\ H_A\colon \mu \neq \mu_0$
bzw.

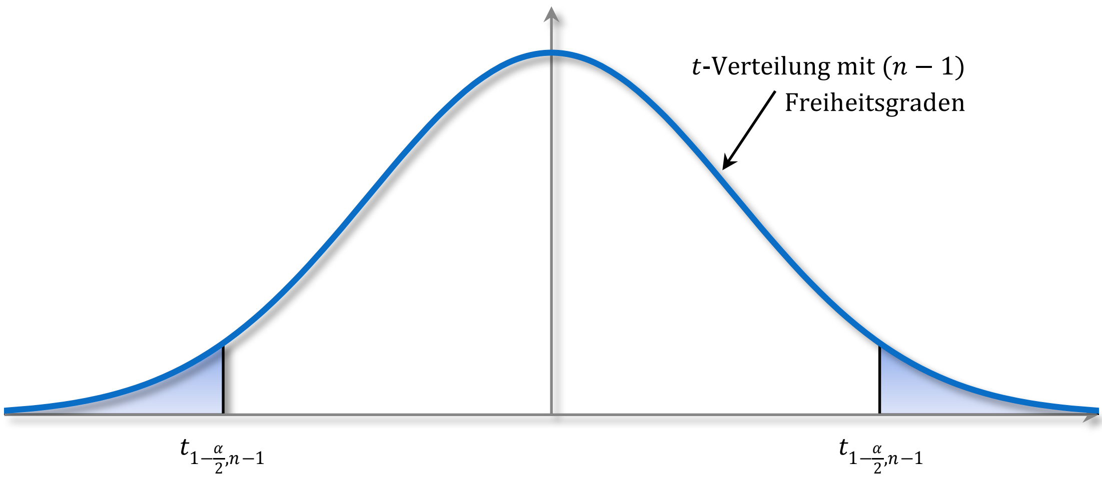
$$H_0\colon \mu \leq \mu_0, \qquad H_A\colon \mu > \mu_0$$
$$H_0\colon \mu \geq \mu_0, \qquad H_A\colon \mu < \mu_0$$

B) Testgröße

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{s}\sqrt{n}$$
$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

Für $\mu = \mu_0$ hat t_{n-1} eine t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden.

C) Kritischer Bereich



$K = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2,n-1}\right) \cup \left(t_{1-\alpha/2,n-1}, \infty\right)$ $\quad \mu = \mu_0$ gegen $\mu \neq \mu_0$
$K = \left(t_{1-\alpha,n-1}, \infty\right)$ $\quad \mu \leq \mu_0$ gegen $\mu > \mu_0$
$K = \left(-\infty, -t_{1-\alpha,n-1}\right)$ $\quad \mu \geq \mu_0$ gegen $\mu < \mu_0$
$\qquad H_0 \qquad H_A$

D) Berechnen des Wertes der Teststatistik und Entscheidung treffen.

BEISPIEL: Wellendurchmesser: Abweichung von Normwert nach unten.

$$n = 20, \qquad \bar{X} = 42, \qquad s^2 = 25$$
$$\text{Normwert } \mu_0 = 45, \qquad \alpha = 0{,}05$$

A) $H_0: \mu \geq \mu_0, H_A: \mu < \mu_0$

B) Testgröße:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{s}\sqrt{n}$$

C) Kritischer Bereich:

$$K = \left(-\infty, -t_{1-\alpha,19}\right) = (-\infty;\ -1{,}729)$$

D) Wert von t_{n-1} ist $\frac{42-45}{\sqrt{25}}\sqrt{20} = -2{,}683$. Folglich lehnen wir H_0 ab.

INDEX

W

Z

⍰